Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 182

Heft 2

Ausgegeben am 25. Juni 1940

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1940

Band 182. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Mohr, Ernst, Über die Kräfte und Momente, welche Singularitäten auf eine stationäre Flüssigkeitsströmung übertragen 65

Haupt, Otto, Georg Nöbeling und Christian Pauc, Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen 105

Egerváry, Eugen, Über ein räumliches Analogon des Sehnenvierecks 122

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Schriftleitung unter der Anschrift:
An die Schriftleitung des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Über die Kräfte und Momente, welche Singularitäten auf eine stationäre Flüssigkeitsströmung übertragen.

Von *Ernst Mohr* in Breslau.

Einleitung.

1. In zwei grundlegenden Arbeiten hat Lagally [1]) zum ersten Male allgemein die Kräfte und Momente bestimmt, welche eine stationäre Flüssigkeitsströmung (unter gewissen Voraussetzungen) auf einen Körper bzw. umgekehrt dieser Körper auf die Flüssigkeit ausübt. Die Lösung gelingt ihm dadurch, daß er in bekannter Weise den Körper durch Singularitäten (Quellen, Dipole, Wirbel) ersetzt, die zusammen mit den übrigen Singularitäten der gegebenen Strömung in seine Endformeln für Kraft und Moment eingehen. Da hierbei der Körper gar nicht mehr auftritt, sondern nur noch das ihn ersetzende Singularitätensystem, so sieht man, daß die ganze Frage darauf hinausläuft, festzustellen, welche Kräfte und Momente solche Singularitäten auf die Flüssigkeitsströmung übertragen, bzw. mit welchen Kräften und Momenten diese Singularitäten in der stationären Flüssigkeitsströmung festgehalten werden müssen. Erinnern wir rasch an zwei bekannte Beispiele, in denen die konstante Dichte $= 1$ angenommen ist [2]):

1. Liegt eine auf die kugelförmige Volumeinheit verschmiert gedachte Quelle der Ergiebigkeit $\operatorname{div} \mathfrak{w} = e$ in einer Parallelströmung $\{\mathfrak{U}\}$ vor (Fig. 1), so benötigt sie die Haltekraft

$$\mathfrak{K}_h = \mathfrak{U} \operatorname{div} \mathfrak{w}. \tag{1}$$

Man sieht, daß im Mittelpunkt der Kugel die Geschwindigkeit $\mathfrak{U}$ herrscht, ein Resultat, das erhalten bleibt, wenn man das Quellgebiet immer mehr zusammenschrumpfen läßt, und daher auch noch für die punktförmige Quelle gilt; Fig. 1a. Es bildet sich

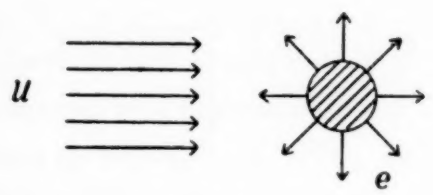


Fig. 1.

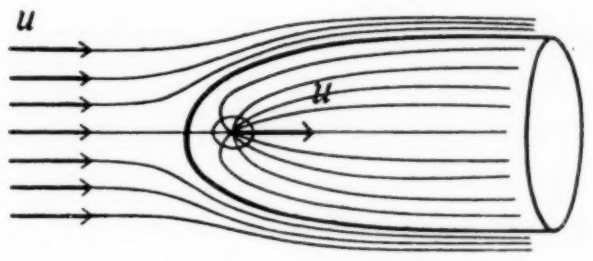


Fig. 1a.

dann eine Strömung mit einer Gleichgewichtsfläche, die einen sogenannten Halbkörper wie in Fig. 1a angedeutet, abgrenzt. Da jedem Teilchen bei seinem Eintritt in das Strömungsfeld die Geschwindigkeit $\mathfrak{U}$ erteilt wird, pro sec aber Teilchen von der Gesamt-

[1]) M. Lagally, Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. **2** (1922), S. 409-422. M. Lagally, Über den Druck einer strömenden Flüssigkeit auf eine geschlossene Fläche, Sitzungsberichte der bayr. Akad. d. Wissenschaften 1921, S. 209—226.

[2]) Vgl. hierzu Prandtl-Tietjens, Hydro- u. Aeromechanik **2**, Berlin 1931, S. 137—139 u. 173—180.

masse e eintreten, so beträgt der sekundliche Transport an Bewegungsgröße $e\mathfrak{U}$, dem nach Newtons Grundgesetz der Mechanik eine gleichgroße Kraft auf den Quellpunkt entspricht. — Denkt man sich die Gleichgewichtsfläche starr und starr verbunden mit dem Quellpunkt, und das Ganze an einem Faden als Pendel aufgehängt, so wird dieses nur dann in Ruhe bleiben, wenn der Pendelkörper mit der Kraft $\mathfrak{K}_h = e\mathfrak{U}$ festgehalten wird. — Es wird sich im folgenden als vorteilhaft erweisen, wenn wir in solcher Weise an Stelle der Impulstransporte die diesen entsprechenden Haltekräfte in die Rechnung einführen.

2. Ist die Strömung eben, und statt der Quelle ein auf die Flächeneinheit verschmiert gedachter Wirbel von der Stärke $|\operatorname{rot}\mathfrak{w}| = \Gamma$ vorhanden (Fig. 2), so erfordert er pro Längeneinheit (gerechnet in der Richtung des Wirbelvektors $\operatorname{rot}\mathfrak{w}$), also in räumlicher Auffassung wieder pro Volumeneinheit die Haltekraft

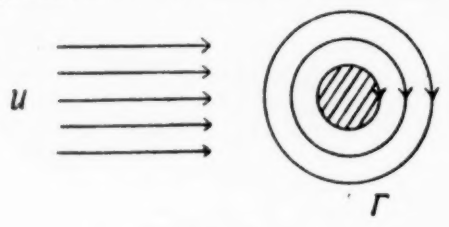


Fig. 2.

$$\mathfrak{K}_h = \operatorname{rot}\mathfrak{w} \times \mathfrak{U} \tag{2}$$

(sog. Kuttasche Kraft).

Später hat Betz [3]) in einer schönen Arbeit die rein rechnerische Betrachtungsweise von Lagally durch eine physikalisch-anschauliche ersetzt, und auf spezielle Strömungen angewandt.

Die folgende Untersuchung ist nun dadurch charakterisiert, daß in ihr konsequent der obenerwähnte Begriff der Haltekraft bzw. des Haltemomentes einer Singularität in den allgemeinen Betzschen Gedankengang eingeführt wird. Auf diese Weise lassen sich die Lagallyschen Formeln einfach begründen. Die Methode leistet jedoch noch mehr: Da sie direkt mit den Singularitäten operiert, ergibt sie, wenn man das den Körper ersetzende Singularitätensystem in besonderer Weise z. B. als auf der Oberfläche liegend wählt, für jeden solchen Fall besondere Formeln, z. B. solche, in denen im Gegensatz zu den Lagallyschen nur noch die Oberfläche selbst, jedoch nicht mehr das sie ersetzende Singularitätensystem in ihrem Innern auftritt. Hierzu ist es allerdings nötig, genauer auf das einen Körper ersetzende Singularitätensystem einzugehen, was in dem (etwas langen) vorbereitenden ersten Abschnitt geschieht. Schließlich läßt sich die Methode mit einer kleinen Abänderung im Falle der Momente auf ebene Strömungen übertragen, und führt dort zu analogen Ergebnissen.

Erster Abschnitt. Das Singularitätensystem.

§ 1. Quellen-, Dipol- und Wirbelflächen.

2. *Bezeichnungen und Voraussetzungen.* In diesem Abschnitt [4]) wollen wir die Theorie der Potentialströmungen in einer für uns passenden Form kurz und anschaulich fassen.

Die Bezeichnungen sind die üblichen [5]). x, y, z (bzw. x_1, x_2, x_3) seien kartesische Koordinaten, $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ (bzw. $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$) die zugehörigen Einheitsvektoren, O der Koordinatenursprung; $\mathfrak{a}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \ldots$ seien allgemeine Vektoren, $\mathfrak{r}$ i. a. der (von einer als fest betrachteten Stelle gezogene) Ortsvektor, r seine Länge; wo ein Vektor, z. B. $\mathfrak{w}$, für ein ganzes Feld erklärt ist, werde dieses mit $\{\mathfrak{w}\}$ bezeichnet. ∇ (Nabla) ist der bekannte Differentiationsvektor $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$; für $\nabla\varphi$ (φ Skalar), $\nabla \cdot \mathfrak{w}$ und $\nabla \times \mathfrak{w}$ schreiben wir oft auch grad φ, div $\mathfrak{w}$ und rot $\mathfrak{w}$. Ist $\mathfrak{a} = (a, b, c)$, so bedeutet $(\mathfrak{a} \cdot \nabla)$ den linearen Differentialoperator

[3]) A. Betz, Singularitätenverfahren zur Ermittlung der Kräfte und Momente auf Körper in Potentialströmungen, Ing.-Archiv **3** (1932), S. 465-462.

[4]) Vgl. hierzu H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (Deutsch von Elise Helly), 2. Aufl., Leipzig u. Berlin 1931, S. 1—69 und S. 214—230.

[5]) Siehe z. B. M. Lagally, Vektorrechnung, 2. Aufl., Leipzig 1934.

$a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}$. $\triangle$ ist der Laplacesche Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Wo ein Mißverständnis möglich ist, wird die Stelle, an der die Operation ∇ auszuführen ist, unter das Zeichen ∇ gesetzt; ist z. B. r der Abstand der beiden Punkte P, Q, so ist

$$\underset{P}{\nabla}\frac{1}{r}=-\underset{Q}{\nabla}\frac{1}{r}\,.$$

Der von einem Punkt A nach einem anderen Punkt B gezogene Vektor wird mit $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet. — ds, $d\sigma$, $d\tau$ sind Längen-, Flächen- und Volumelemente. Ist eine Fläche F orientiert, so seien $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$ ihr allgemeiner normaler bzw. tangentieller (Einheits-)Vektor. Die beiden an F grenzenden Räume werden durch — und + unterschieden, die verschiedenen Seiten von F durch F^- und F^+, und analog die Werte von evtl. dort existierenden skalaren und vektoriellen Größen, z. B., $\mathfrak{w}$ durch Anhängen der Zeichen — und + als oberer rechter Index, also z. B. $\mathfrak{w}^-$ und $\mathfrak{w}^+$. Der Sprung, den eine solche Größe, z. B. $\mathfrak{w}$, beim Durchgang durch F oder kurz an F erleidet, wird durch $[\mathfrak{w}]^+_- = \mathfrak{w}^+ - \mathfrak{w}^-$ bezeichnet. Falls F geschlossen ist, weist $\mathfrak{n}$ stets nach außen; es ist $d\mathfrak{o} = d\sigma\,\mathfrak{n}$, $d\mathfrak{o}' = -d\mathfrak{o}$. Wo Integrationsvariable bzw. -gebiete sich von selbst verstehen, lassen wir sie oft weg. — Die konstante Dichte sei $= 1$ gesetzt.

3. *Geschwindigkeitspotential.* Ist die Strömung $\{\mathfrak{w}\}$ in einem Gebiete drehungs-, wirbel-, oder im Kleinen zirkulationsfrei, d. h. dort rot $\mathfrak{w} = 0$, so existiert bekanntlich ein Geschwindigkeitspotential φ, derart, daß $\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\varphi$ ist; φ ist bis auf eine belanglose additive Konstante gleich der Zirkulation längs irgendeiner Kurve, die von einem beliebigen aber festen Feldpunkt zu dem variablen Feldpunkt P führt; längs einer Stromlinie nimmt also φ stets zu. Ist die Strömung überdies auch noch im Großen zirkulationsfrei, so ist φ eindeutig; speziell ist also φ in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet eindeutig. Ist e die Quelldichte, d. h. $\operatorname{div}\mathfrak{w} = e$, so erfüllt φ wegen $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \triangle\varphi$ die Poissonsche Gleichung

$$\triangle\varphi = e\,, \tag{3}$$

die im Falle der Quellenfreiheit in die Laplacesche Gleichung

$$\triangle\varphi = 0 \tag{4}$$

übergeht. Konstruiert man im letzten Falle die Stromröhren bzw. -linien und die dazu orthogonalen Niveauflächen $\varphi = \text{const.}$, so gewinnt man ein anschauliches Bild der quellenfreien Potentialströmung $\{\operatorname{grad}\varphi\}$; dabei strömt durch jeden Querschnitt einer Stromröhre gleichviel Flüssigkeit (Kontinuitätsgleichung).

4. *Quellen und Dipole.* Die wichtigste Potentialströmung ist die der punktförmigen Quelle, insofern als jede beliebige Potentialströmung durch lineare Überlagerung solcher Quellströmungen entstanden gedacht werden kann; das (eindeutige) Potential ist hier

$$\varphi = \frac{-e}{4\pi}\frac{1}{r}\,, \tag{5}$$

wo r der Abstand vom Quellpunkt Q zum Aufpunkt P und e die Ergiebigkeit der Quelle ist. Läßt man zwei im Abstand a befindliche Quellen Q_- und Q_+ mit gleichgroßen entgegengesetzten Ergiebigkeiten e_- und e_+ in den Mittelpunkt Q ihrer Verbindungslinie rücken, und steigert gleichzeitig ihre Ergiebigkeiten derart, daß das Produkt $e_+ \cdot a$ einem von 0 verschiedenen Grenzwert m zustrebt, so erhält man eine Doppelquelle oder einen Dipol mit dem Potential

$$\varphi = \frac{-m}{4\pi}(\mathfrak{t}\cdot\underset{Q}{\nabla})\frac{1}{r} = \frac{-m}{4\pi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s} \tag{6}$$

oder explizit

$$\varphi = \frac{-m\cos\vartheta}{4\pi}\frac{1}{r^2}, \tag{6a}$$

wo $\mathfrak{t}$ den Einheitsvektor in der Richtung von Q_- nach Q_+, $\frac{\partial}{\partial s}$ die Differentiation in Richtung $\mathfrak{t}$ und ϑ den Winkel zwischen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{r} = \vec{QP}$ bedeutet; da durch m und $\mathfrak{t}$, d. h. also durch den Vektor $\mathfrak{d} = m\mathfrak{t}$ der Dipol charakterisiert ist, so können wir für sein Potential auch schreiben:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}\cdot\underset{Q}{\nabla})\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}\cdot\underset{P}{\nabla})\frac{1}{r}. \tag{6b}$$

Schreiben wir im Falle der Quelle ϱ an Stelle von r, so gilt mit $\vec{OQ} = \mathfrak{a}$, $\vec{OP} = \mathfrak{r}$ für $r > a$, wo $a = |\mathfrak{a}|$, die bekannte Reihenentwicklung [6])

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} - \frac{1}{1!}(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\frac{1}{r} + \frac{1}{2!}(\mathfrak{a}\cdot\nabla)^2\frac{1}{r} - + \cdots, \tag{7}$$

in welcher die Differentiation $(\mathfrak{a}\cdot\nabla)$ im Aufpunkt P auszuführen ist; aus ihr folgen für die Potentiale einer in Q befindlichen Quelle e bzw. eines dort befindlichen Dipols $\mathfrak{d}$ die Entwicklungen

$$\begin{cases} -\frac{e}{4\pi}\frac{1}{\varrho} = -\frac{e}{4\pi}\frac{1}{r} + \frac{1}{1!}\frac{e}{4\pi}(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\frac{1}{r} - + \cdots \\ \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)\frac{1}{r} - \frac{1}{1!}\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\frac{1}{r} + - \cdots. \end{cases} \tag{8}$$

Hat man zwei Quellen bzw. zwei Dipole, deren Größen jeweils durch die unteren Zeiger 1 und 2 voneinander unterschieden werden, so gewinnt man durch Addition der entsprechenden Entwicklungen die Formeln

$$\begin{cases} -\frac{e_1}{4\pi}\frac{1}{\varrho_1} - \frac{e_2}{4\pi}\frac{1}{\varrho_2} = -\frac{e_1+e_2}{4\pi}\frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi}((e_1\mathfrak{a}_1 + e_2\mathfrak{a}_2)\cdot\nabla)\frac{1}{r} - + \cdots \\ \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}_1\cdot\nabla)\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{d}_2\cdot\nabla)\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{4\pi}((\mathfrak{d}_1+\mathfrak{d}_2)\cdot\nabla)\frac{1}{r} - + \cdots, \end{cases} \tag{9}$$

die folgendes aussagen: Zwei Quellen wirken im Unendlichen (d. h. für große r) bis auf Glieder von höherer Ordnung als $\frac{1}{r^2}$

a) wie die zugehörige Schwerpunktsquelle der Stärke $e_1 + e_2$ in $(e_1\mathfrak{a}_1 + e_2\mathfrak{a}_2)/(e_1 + e_2)$, falls $e_1 + e_2 \neq 0$;

b) sonst wie der Dipol $e_1\mathfrak{a}_1 + e_2\mathfrak{a}_2$ in O.

Zwei Dipole wirken entsprechend im Unendlichen wie der Dipol $\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2$ in O. Hierbei dürfen wir den Fall b) offenbar als Grenzfall von a) auffassen.

Das zu der Quelldichte e gehörige Geschwindigkeitspotential können wir nach (5) sofort zu

$$\varphi = \int\frac{-e\,d\tau}{4\pi r} \tag{10}$$

angeben, und haben hierin die (eindeutige) Lösung der Poissonschen Gleichung (3). Die Geschwindigkeit im Aufpunkt beträgt

$$\mathfrak{w} = \underset{P}{\operatorname{grad}}\int\frac{-e\,d\tau}{4\pi r}, \tag{11}$$

---

[6]) Vgl. Lense, Reihenentwicklung in der mathematischen Physik, Berlin u. Leipzig 1933, S. 84—85, und die erste unter [1]) zitierte Arbeit von Lagally, S. 417, Gl. (16).

eine Beziehung, die explizit die von einem Quellenfelde induzierte Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ angibt, und als die (im ganzen Raume) eindeutige Auflösung der Gleichung

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{w} = e, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{w} = 0$$

bei gegebenem e anzusehen ist.

Indem wir Quellen und Dipole stetig über Räume oder Flächen verteilen, kurz räumlich oder flächenhaft verschmieren, gelangen wir zu komplizierteren und wie schon erwähnt allgemeinsten Potentialströmungen.

5. *Quellenflächen.* Seien, wie in Fig. 3 angedeutet, über den Zwischenraum Z zweier paralleler Ebenen vom Abstand a Quellen mit der konstanten Dichte e (räumlich) verschmiert. Dann wird die Flüssigkeit senkrecht zu der gestrichelten Mittelebene nach beiden Seiten abströmen mit einer Geschwindigkeit, die von der Mittelebene bis zur Berandung von 0 auf einen Betrag v linear anwächst, um von da an konstant $= v$ zu bleiben. v ist dadurch bestimmt, daß der Fluß durch das doppelt schraffierte Volumelement $d\tau = a\,d\sigma$ einerseits $= e\ d\tau = e a\,d\sigma$, andererseits $= 2v\,ds$ ist:

$$2v = e\,a = \varepsilon, \qquad v = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Lassen wir $a \to 0$ und gleichzeitig $e \to \infty$ gehen, derart daß $e\,a = \text{const.} = \varepsilon$ bleibt, so erhalten wir eine mit der konstanten Flächendichte ε belegte Quellebene F (Fig. 4).

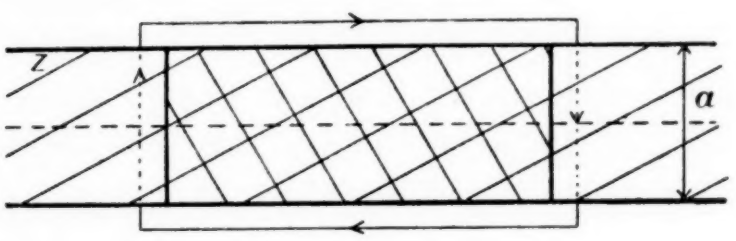


Fig. 3.

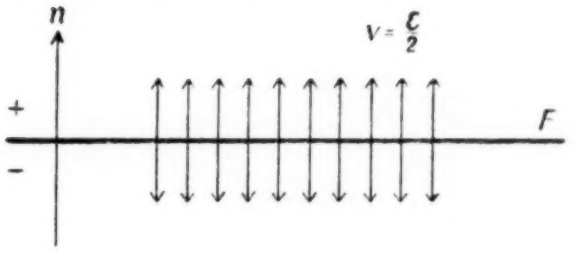


Fig. 4.

Hieraus ergeben sich die charakteristischen Eigenschaften einer solchen Potentialströmung {grad φ}:

1. Da während des Grenzüberganges $a \to 0$ die Geschwindigkeit innerhalb Z stets endlich $\left(\text{in unserem Beispiel} \leqq \frac{\varepsilon}{2}\right)$ bleibt, so liefert einer der in Fig. 3 punktierten Wege für $a \to 0$ keinen Beitrag zur Zirkulation, d. h. zum Potential φ; anders ausgedrückt: φ ändert sich stetig beim Durchgang durch F.

2. Da die Zirkulation längs des gezeichneten geschlossenen Weges $= 0$ sein muß (φ ist eindeutig!) und die punktierten Wegstücke im Grenzfall keinen Beitrag liefern, so müssen sich die Beiträge der beiden anderen Strecken aufheben, d. h. die Tangentialgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_t$ muß zu beiden Seiten gleich sein:

$$\text{(13)} \qquad \mathfrak{w}_t^+ = \mathfrak{w}_t^- .$$

3. Dagegen ändert sich die Normalgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_n$ beim Durchgange durch F unstetig nach folgender Maßgabe: Die auf ein Flächenelement $d\mathfrak{o} = d\sigma\,\mathfrak{n}$ entfallende Ergiebigkeit oder Quellmasse ist einerseits $= \varepsilon\,d\sigma$, andererseits

$$= \mathfrak{w}^+ \cdot d\mathfrak{o} - \mathfrak{w}^- \cdot d\mathfrak{o} = [\mathfrak{w}]^+_- \cdot d\mathfrak{o}\,,$$

also gilt:

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} \text{Quellmasse pro Element } d\mathfrak{o} = [\mathfrak{w}]^+_- \cdot d\mathfrak{o} \quad \text{oder} \\ \qquad\qquad \varepsilon = [\mathfrak{w}]^+_- \cdot \mathfrak{n} = \left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right]^+_- \text{[7]}. \end{cases}$$

[7]) Man beachte, daß die rechte Seite, also auch ε unabhängig von der Orientierung der Fläche ist, wie es sein muß; dasselbe gilt auch für die noch folgenden analogen Beziehungen.

4. Da sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ beim Durchgang durch Z linear ändert, so ist im Grenzfall die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_0$ in der Fläche

$$\mathfrak{w}_0 = \frac{\mathfrak{w}^- + \mathfrak{w}^+}{2} \qquad (= 0 \text{ in unserem Beispiel}). \tag{15}$$

Diese vier Eigenschaften gelten allgemein für jede beliebige Quellenfläche, da bei ihrem Nachweis nirgends die Voraussetzungen unseres speziellen Beispieles benutzt wurden.

Liegt umgekehrt zu beiden Seiten einer Fläche F eine Potentialströmung vor, deren Normalgeschwindigkeit an F einen Sprung erleidet, so kann man sich diesen Sprung durch eine Quellbewegung von F mit der Dichte ε erzeugt bzw. „überwunden" denken.

6. *Anwendung.* Liegt die Quellmasse mit ihrer negativen Seite auf einer starren Fläche auf, so ist dort $\mathfrak{w}^- \cdot d\mathfrak{o} = 0$, so daß die Quellmasse pro Flächeneinheit nach (14) einfach $\mathfrak{w}^+ \cdot \mathfrak{n} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^+$ wird. Als Anwendung hiervon lösen wir die Aufgabe, in einem gegebenen Gebiet eine Potentialströmung zu finden, deren Normalgeschwindigkeit auf einer Fläche vorgegebene Werte annimmt. Handle es sich z. B. um das Außengebiet A der in Fig. 5 gezeichneten starren Fläche F (die hier aus zwei geschlossenen Stücken besteht), auf der die Werte $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varepsilon$ vorgegeben sind. Dann denken wir uns auf dem schmalen Zwischenraum Z von der Dicke a Quellen mit der Dichte $e = \frac{\varepsilon}{a}$ verschmiert. In dem noch verbleibenden Außenraum wird sich dann eine Potentialströmung {grad φ} einstellen, die im Grenzfall $a \to 0$ auf F die Normalgeschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varepsilon$ annimmt. Außerdem sieht man: Die Strömung ruht im Unendlichen und wird sich dort wie die Strömung einer punktförmigen Quelle der Ergiebigkeit $\tilde{\varepsilon} = \int \varepsilon d\sigma$ verhalten, in Zeichen

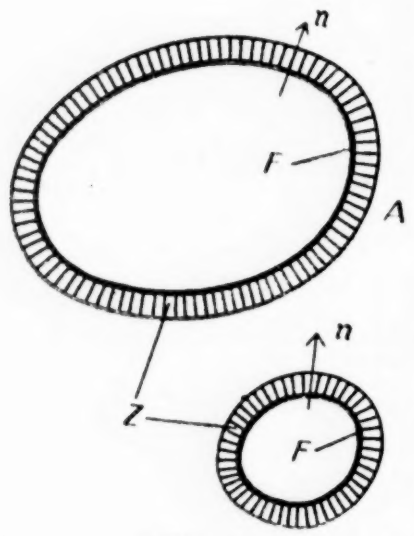


Fig. 5.

$$\varphi \sim -\frac{\tilde{\varepsilon}}{4\pi}\frac{1}{r}.$$

Dieselbe Konstruktion läßt sich auch auf ein Innengebiet anwenden, wobei hier die Randwerte ε an die selbstverständliche Bedingung $\int \varepsilon d\sigma = 0$ geknüpft sind (sog. zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie). Die Eindeutigkeit der Lösung ist schon hier anschaulich klar, wird aber auch später zusammen mit der Eindeutigkeit der sog. ersten Randwertaufgabe nochmals bewiesen werden.

7. *Dipolflächen.* Stellen wir der mit der konstanten Quelldichte ε belegten Ebene von vorhin eine parallele Ebene im Abstand a gegenüber, die mit der entgegengesetzten Dichte $-\varepsilon$ belegt ist, so haben wir den Fall der Fig. 6: Die Flüssigkeit strömt innerhalb

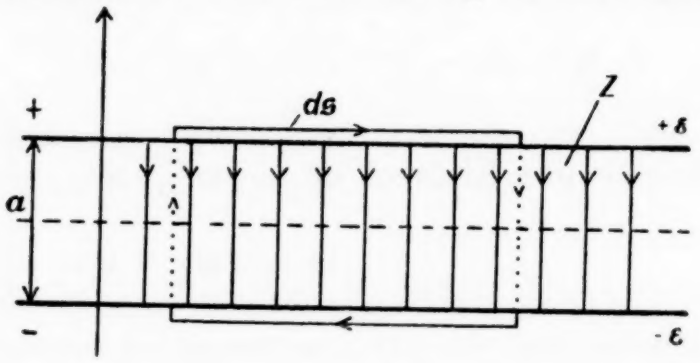


Fig. 6.

der Ebenen und senkrecht zu diesen mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \varepsilon$ ab, während außerhalb der Ebenen Ruhe herrscht (unendlich langer Plattenkondensator der Elektrostatik!). Lassen wir $a \to 0$ gehen und steigern gleichzeitig ε so, daß $\varepsilon \cdot a = \text{const.} = \gamma$ bleibt, so erhalten wir eine mit der konstanten Dichte γ besetzte Dipolebene F. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{w} = -v\mathfrak{n}$ im Zwischenraum Z wird im Grenzfall beliebig groß:

$$v = \varepsilon = \frac{\gamma}{a} \to \infty \quad \text{für} \quad a \to 0, \tag{16}$$

und zwar so, daß das Produkt

$$v\,a \text{ stets endlich und zwar } = \gamma \text{ bleibt.} \tag{16a}$$

Hieraus ergeben sich die charakteristischen Eigenschaften einer solchen Potentialströmung {grad φ}:

1. Da der in Fig. 6 punktierte Weg links beim Grenzübergang gemäß (16a) stets einen endlichen Beitrag zur Zirkulation Γ liefert, so ändert sich Γ bzw. φ sprunghaft um $\mathfrak{w} \cdot a\mathfrak{n} = -\gamma$, d. h. es ist

$$\gamma = -[\varphi]^+_- . \tag{17}$$

Da ferner die Zirkulation, d. h. φ auf diesem Wege linear anwächst, so nimmt φ auf der gestrichelten Mittelebene, d. h. im Grenzfall auf F, den Wert an

$$\varphi_0 = \frac{\varphi^- + \varphi^+}{2} . \tag{18}$$

2. Da die Ergiebigkeit des in Fig. 6 durch den geschlossenen Weg abgegrenzten Volumelementes stets $= 0$ ist, so sind die Normalgeschwindigkeiten im Grenzfall auf beiden Seiten gleich:

$$\mathfrak{w}_n^+ = \mathfrak{w}_n^- . \tag{19}$$

Beide Eigenschaften gelten wieder, wie man sieht, für jede beliebige Dipolbelegung. Im allgemeinen Fall ergibt sich aus (17) noch die weitere Eigenschaft:

3. Die tangentielle Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_t$ erleidet an F einen Sprung von der Größe

$$[\mathfrak{w}_t]^+_- \cdot d\mathfrak{s} = \partial[\varphi]^+_- = -\partial\gamma . \tag{20}$$

Die Gesamtzirkulation $d\Gamma$ um die in Fig. 6 gezeichnete Kurve ist auch im Grenzfall noch $= 0$, indem ja der Beitrag der punktierten Wegstücke gerade $= \partial\gamma$ ist und daher die Zirkulation $-\partial\gamma$ um die übrige Berandung kompensiert.

Der Beitrag, den ein an der Stelle Q befindliches Dipolelement $\gamma\,d\mathfrak{o}$ zum Potential im Punkte P liefert, ist nach (6a):

$$-\frac{\gamma\,d\sigma}{4\pi} \cdot \frac{\cos\vartheta}{r^2} = -\frac{\gamma}{4\pi} \cdot \frac{d\sigma \cdot \cos\vartheta}{r^2} ,$$

wo ϑ den Winkel zwischen $d\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{r} = \vec{QP}$ bedeutet; hierbei ist der zweite Faktor auf der rechten Seite offenbar gleich dem Winkel $d\omega$, unter dem das Element $d\mathfrak{o}$ von P aus erscheint, so daß man also für den genannten Beitrag auch

$$-\frac{\gamma}{4\pi} d\omega \tag{21}$$

schreiben kann.

Liegt umgekehrt zu beiden Seiten einer Fläche F eine Potentialströmung vor, deren Potential an F einen Sprung $-\gamma$ bzw. deren Tangentialkomponente in einer bestimmten Flächenrichtung t einen Sprung $-\frac{\partial\gamma}{\partial s}$ erleidet, so kann man sich diesen Sprung durch eine Dipolbelegung von F mit der Dichte γ erzeugt bzw. überwunden denken.

8. *Wirbelflächen.* Neben den Dipolflächen sind bekanntlich auch flächenhafte Wirbelverteilungen, sog. Wirbelschichten, dazu geeignet, einen tangentiellen Geschwindigkeitsunterschied zu überwinden. Im Falle eines Zusammenflusses wie in Fig. 7 können wir uns vorstellen, daß der Übergang in einem schmalen Zwischenraum Z der Dicke a in linearer Weise vorgenommen wird: Dort herrscht dann eine konstante Wirbelstärke,

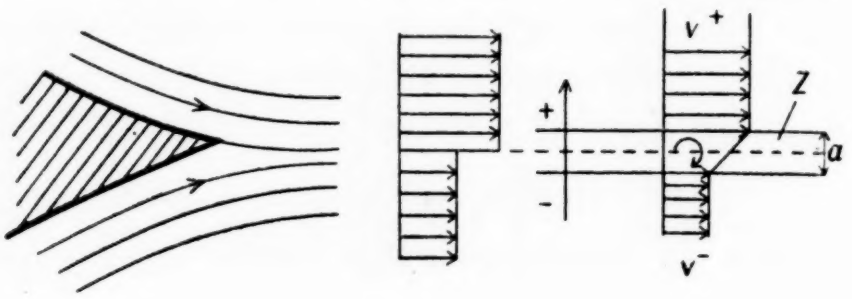


Fig. 7.

die gleich dem Geschwindigkeitsanstieg ist, und die im Grenzfall $a \to 0$ derart $\to \infty$ geht, daß ihr Produkt mit a stets endlich und gleich $v^+ - v^-$ bleibt; der Wirbelvektor steht hier senkrecht zur Zeichenebene, und bildet mit dem Drehsinn in Fig. 7 zusammen eine Rechtsschraube; die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_0$ in der Fläche wird dann

$$\mathfrak{w}_0 = \frac{\mathfrak{w}^- + \mathfrak{w}^+}{2}. \tag{22}$$

Um im allgemeinen Falle, wo Flüssigkeit zu beiden Seiten einer Fläche F mit verschiedener tangentieller Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_t^-$ und $\mathfrak{w}_t^+$ strömt, die Wirbellinien zu finden,

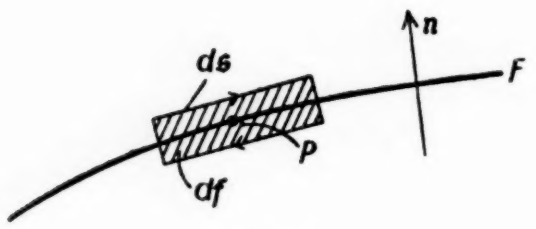


Fig. 8.

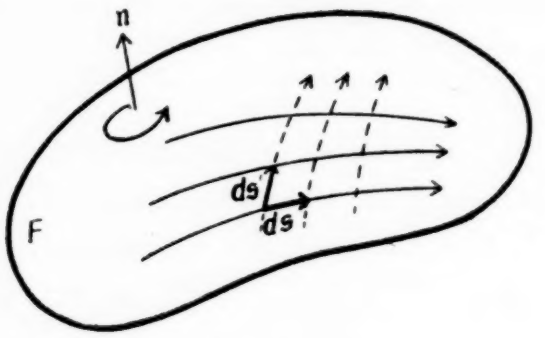


Fig. 9.

denken wir uns wieder den Übergang in einem schmalen Zwischenraum Z linear vorgenommen. Wegen der bekannten Beziehung $\partial\Gamma = \text{rot } \mathfrak{w} \cdot d\mathfrak{f}$ brauchen wir dann nur in jedem Punkte P der den Raum Z halbierenden und zu F parallelen Mittelfläche ein dort angebrachtes Flächenelement $d\mathfrak{f}$, das in Fig. 8 in Draufsicht gezeichnet ist, so lange um P zu drehen, bis die Zirkulation $\partial\Gamma$ um $d\mathfrak{f}$ ihr (positives) Maximum erreicht hat; dann zeigt $d\mathfrak{f}$ die Richtung der Wirbellinie an, wobei es genügt, $d\mathfrak{f}$ innerhalb der obigen Mittelfläche zu bewegen. Ist $d\mathfrak{s}$ das durch $d\mathfrak{f}$ auf F^+ ausgeschnittene Linienelement, so gilt

$$\partial\Gamma = [\mathfrak{w}_t]^+_- \cdot d\mathfrak{s}\,, \tag{23}$$

und dieser Ausdruck erreicht sein positives Maximum dann, wenn $d\mathfrak{s}$ parallel dem Geschwindigkeitsvektor $[\mathfrak{w}_t]^+_-$ der Relativströmung wird; d. h.: die Wirbellinien verlaufen senkrecht zu den Stromlinien der Relativströmung $\{[\mathfrak{w}_t]^+_-\}$ im Sinne des durch $\mathfrak{n}$ auf F gegebenen Drehsinnes (Fig. 9). Bedeutet $d\mathfrak{s}'$ das Linienelement längs der Wirbellinie, so beträgt im Grenzfall die auf das Oberflächenelement $d\mathfrak{o} = d\mathfrak{s} \times d\mathfrak{s}'$ entfallende Wirbelmasse

$$\text{rot } \mathfrak{w}\, d\tau = \text{rot } \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{s}' = d\mathfrak{s}'\, d\mathfrak{f} \cdot \text{rot } \mathfrak{w}$$

(da $d\mathfrak{s}' \parallel \text{rot } \mathfrak{w}$), also

$$d\mathfrak{s}'\, \partial\Gamma$$

und mithin nach (23)

$$d\mathfrak{s}' [\mathfrak{w}_t]^+_- \cdot d\mathfrak{s} = (\mathfrak{d}\mathfrak{s} \times d\mathfrak{s}') \times [\mathfrak{w}_t]^+_-$$

(wegen $d\mathfrak{s}' \perp [\mathfrak{w}_t]^+_-$), d. h.

$$d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{w}_t]^+_-$$

und hier kann offensichtlich der Index t auch weggelassen werden. Folglich gilt:

$$(24) \qquad \begin{cases} \text{Wirbelmasse pro Element } d\mathfrak{o} = d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{w}]^+_- \ , \\ \text{also pro Flächeneinheit} \quad = \mathfrak{n} \times [\mathfrak{w}]^+_- \ . \end{cases}$$

Liegt umgekehrt eine Strömung vor, deren tangentielle Geschwindigkeit an einer Fläche F einen Sprung erleidet, so können wir uns diesen stets durch eine Wirbelschicht überwunden denken, deren Dichte durch (24) gegeben ist. Da hierbei nicht vorausgesetzt wird, daß außerhalb F Potentialströmung herrscht, so sieht man, daß die Wirbelschichten mehr leisten als die Dipolbelegungen.

9. *Zusammenhang zwischen Dipol- und Wirbelbelegungen.* Es liege jetzt außerhalb der Fläche F eine Potentialströmung vor, deren Tangentialkomponente an F einen Sprung erleidet. Beide Belegungen, sowohl die durch Dipole wie die durch Wirbel, können dann diesen tangentiellen Geschwindigkeitsunterschied überwinden, leisten also genau dasselbe, jedoch auf ganz verschiedene Weise:

Innerhalb der Fläche F, die wir uns wieder von der kleinen Dicke a denken, strömt bei

Dipolen

die Flüssigkeit mit unendlich großer Geschwindigkeit von der positiven nach der negativen Seite ab.

Wirbeln

die Flüssigkeit mit endlicher Geschwindigkeit, die innerhalb F linear von $\mathfrak{w}_t^-$ auf $\mathfrak{w}_t^+$ wächst, so daß im Grenzfall $a \to 0$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_0$ in der Fläche

$$= \frac{\mathfrak{w}_t^- + \mathfrak{w}_t^+}{2}$$

wird.

Dies bedingt, daß in der folgenden Figur 10 im Grenzfall $a \to 0$ bei

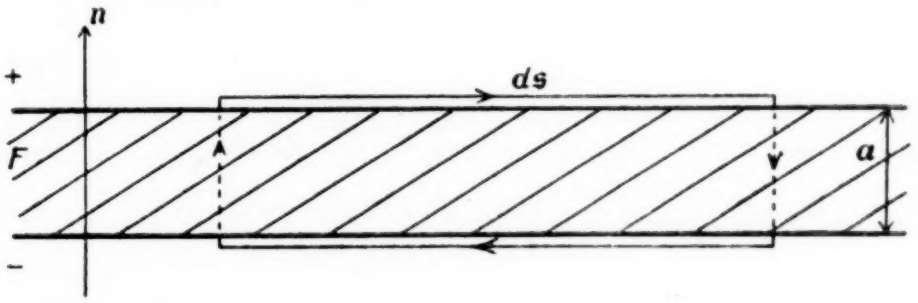


Fig. 10.

Dipolen

die Zirkulation längs der gestrichelten Wegstücke stets endlich bleibt, und die Beiträge des restlichen Weges gerade aufhebt, so daß die Gesamtzirkulation

$$\partial\Gamma = 0$$

ist.

Wirbeln

die Zirkulation längs der gestrichelten Wege $= 0$ wird, so daß die Gesamtzirkulation

$$\partial\Gamma \neq 0 \ ,$$

nämlich

$$\partial\Gamma = [\mathfrak{w}_t]^+_- \cdot d\mathfrak{s}$$

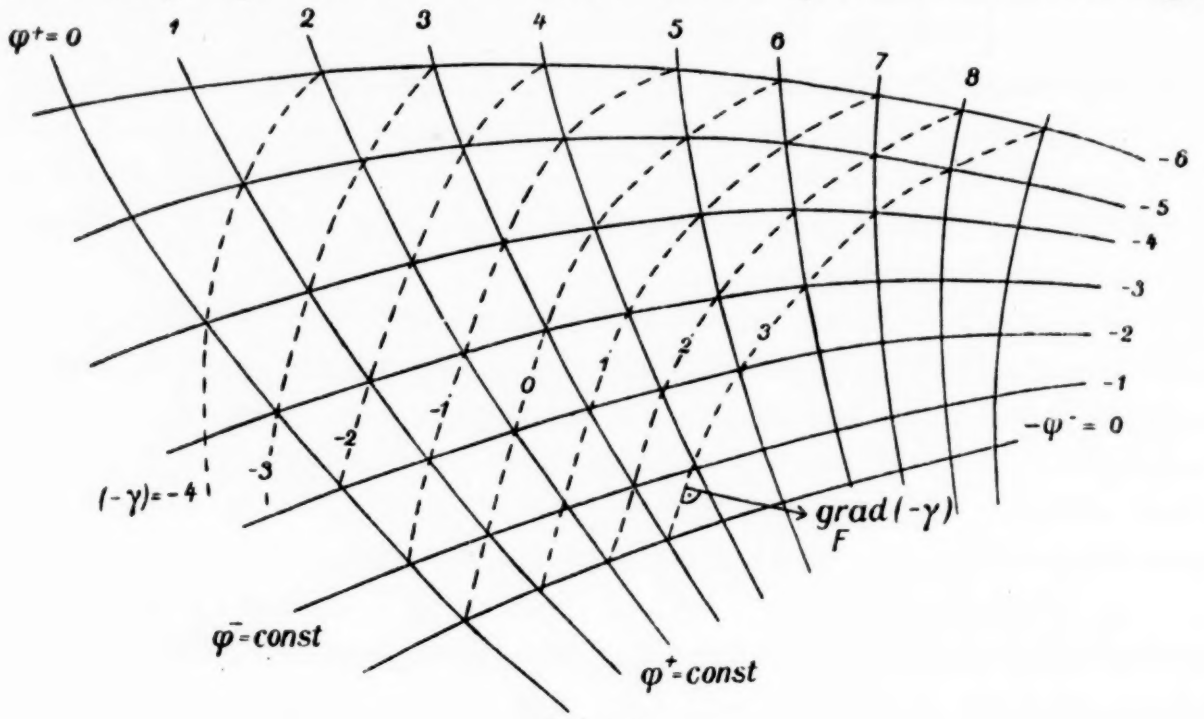
ist.

Außerhalb der Fläche F müssen jedoch beide Belegungen nach dem Grundsatz, daß eine Strömung durch ihre Singularitäten eindeutig bestimmt ist, dasselbe Geschwindigkeitsfeld $\{\mathfrak{w}\}$ erzeugen, können sich also dort gegenseitig ersetzen.

Wird das Potential einer Dipolbelegung auf der negativen bzw. positiven Seite durch φ^- und φ^+ bezeichnet, so daß also auf F

$$[\varphi]^+_- = \varphi^+ - \varphi^- = -\gamma$$

ist, so schneiden die Niveauflächen $\varphi^- = \text{const.}$, $\varphi^+ = \text{const.}$ innen und außen auf F Linien aus, welche die Niveaulinien bilden für die zugehörigen tangentiellen Strömungen $\{\mathfrak{w}_t^-\}$, $\{\mathfrak{w}_t^+\}$, die also ebenfalls Potentialströmungen und zwar *auf* der Fläche F sind. In Fig. 11 sind einige äquidistante Niveaulinien auf der positiven Seite von F gezeichnet,



Fgi. 11.

wobei der Potentialunterschied $= 1$ angenommen ist: Die gestrichelten Diagonalen stellen dann nach der bekannten Methode von Maxwell die Linien $-\gamma = [\varphi]^+_- = \text{const.}$ dar, sind also die Niveaulinien der relativen Potentialströmung

$$[\mathfrak{w}_t]^+_- = \operatorname*{grad}_F [\varphi]^+_- = \operatorname*{grad}_F (-\gamma)$$

(wo das Zeichen F unter grad andeuten soll, daß die Operation grad auf der Fläche vorzunehmen ist), senkrecht zu denen mithin die Relativströmung statthat. Verwendet man andererseits Wirbel, so verlaufen auch die Wirbellinien nach Nr. 8 senkrecht zu den relativen Stromlinien in dem früher festgesetzten Drehsinn, d. h. aber: die Linien $-\gamma = \text{const.}$ fallen mit den Wirbellinien zusammen, und es ist

$$-\partial\gamma = \partial\Gamma = [\mathfrak{w}_t]^+_- \cdot d\mathfrak{s}\,, \tag{25}$$

wo $\partial\Gamma$ die Zirkulation um die betreffende flächenhafte kleine Wirbelröhre darstellt.

Ist die Dipolfläche F nicht geschlossen, so wird es auf ihr i. a. Linien $\gamma = \text{const.}$ geben, die ebenfalls nicht geschlossen sind; beachtet man dann, daß die Endpunkte solcher Linien mit unendlich großer Geschwindigkeit umströmt werden (da ja in einem solchen Punkt das Potential plötzlich um γ springt), also zum Rand des Flüssigkeitsbereiches zu zählen sind, so sieht man, daß diese Linien in der Auffassung als Wirbelfäden entweder geschlossen sind oder von Rand zu Rand laufen, in Übereinstimmung mit dem Helmholtzschen Satz. — Ist die Dipolfläche F speziell geschlossen, so schneiden die Niveauflächen $\varphi^- = \text{const.}$, $\varphi^+ = \text{const.}$ auf F ebenfalls geschlossene Linien aus, so daß dann auch die früheren Diagonallinien der Fig. 11, d. h. die Wirbellinien, geschlossen sind.

10. *Ein Spezialfall.* Wir wollen noch einen speziellen Fall betrachten: Sei in Fig. 12 nur eine schmale Randzone der Fläche F mit geschlossenen Wirbelfäden von der Gesamtzirkulation Γ besetzt, und die restliche Kalotte frei von Wirbeln. Die Dichte

der entsprechenden Dipolbelegung sei wieder γ. Zieht man dann einen beliebigen Weg C von einem Punkte der unbedeckten Kalotte zum Rand, so wird sich γ nach (25) auf dem in die wirbelfreie Kalotte fallenden Wegstück nicht ändern, also dort einen konstanten Wert γ_0 besitzen, und auf dem restlichen Wege von diesem Werte auf 0 abfallen, und zwar gemäß (25) um den Betrag $\partial\gamma = -\Gamma$, d. h. es wird $0 - \gamma_0 = -\Gamma$ sein oder

$$\gamma_0 = \Gamma .$$

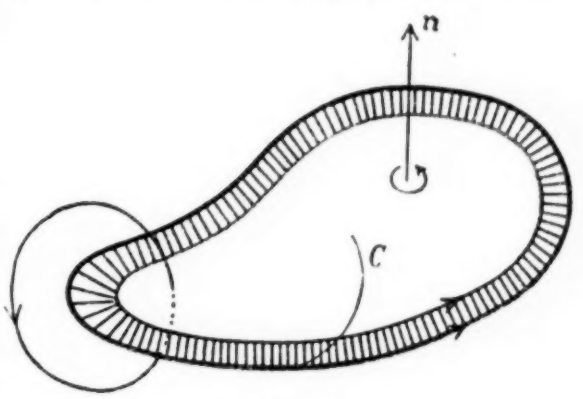


Fig. 12.

Denken wir uns weiter die Wirbelmasse auf den äußeren Rand zusammengeschoben, so erhalten wir das bekannte Resultat, daß ein geschlossener Wirbelfaden der Stärke Γ ersetzt werden kann durch eine Dipolbelegung irgendeiner in ihn gespannten Fläche F mit der Dichte Γ. Die Kurve selbst ist wieder zum Rande zu zählen, so daß hier der Wirbelfaden dem Rande entlang läuft.

Wir wollen noch das Potential φ und die induzierte Geschwindigkeit $\mathfrak{w} = \text{grad}\ \varphi$ des Wirbelfadens angeben. Nach (21) ist

$$\varphi = \int_F \frac{-\Gamma}{4\pi}\, d\omega = -\frac{\Gamma}{4\pi}\,\omega , \tag{26}$$

wo ω der Winkel ist, unter dem die (orientierte) Fläche von P aus erscheint; hierdurch ist der zyklische Charakter von φ in Evidenz gesetzt, da beim Durchgang durch die Fläche ω von 2π auf -2π springt, mithin beim Übergang von der positiven zur negativen Seite längs des in Fig. 12 gezeichneten Weges ω um -4π, also φ um Γ wächst, wie es sein muß. Um nun $\mathfrak{w} = \text{grad}\ \varphi$ zu bekommen, brauchen wir die Änderung $\delta\varphi$ bzw. $\delta\omega$ von φ bzw. ω bei einer Verrückung $\delta\mathfrak{r}$ von P nach P':

$$\delta\varphi = \text{grad}\ \varphi \cdot \delta\mathfrak{r} , \qquad \delta\varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi}\,\delta\omega .$$

Dieselbe Änderung von ω erhält man aber auch, wenn man P festhält und den Wirbelfaden um $\delta\mathfrak{r}' = -\delta\mathfrak{r}$ verschiebt. Der Beitrag, den ein Element des Wirbelfadens zu $\delta\omega$ liefert, ist nach Fig. 13 offenbar

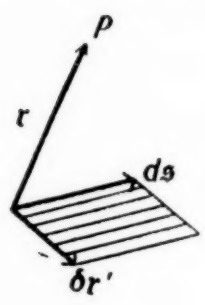


Fig. 13.

$$\frac{(\delta\mathfrak{r}' \times d\mathfrak{s}) \cdot \mathfrak{e}}{r^2} = \frac{(d\mathfrak{s} \times \mathfrak{e}) \cdot \delta\mathfrak{r}'}{r^2} ,$$

wo $\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{r}}{r}$ ist; hieraus folgt

$$\delta\omega = \int \left(d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2}\right) \cdot \delta\mathfrak{r}' = \left\{\int d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2}\right\} \cdot \delta\mathfrak{r}' ,$$

d. h.

$$\mathfrak{w} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2} \left(= \frac{\Gamma}{4\pi}\int d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\right) . \tag{27}$$

Geht man von hier aus zum entsprechenden Differentialgesetz über, so erhält man als Beitrag eines Elementes:

$$\frac{\Gamma}{4\pi}\left(d\mathfrak{s} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2}\right) . \tag{27a}$$

(27) bzw. (27a) entspricht vollständig dem Biot-Savartschen Gesetz der Elektrodynamik, in das es übergeht, wenn man den Wirbelfaden der Stärke Γ durch einen Stromkreis der Stärke I und die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ durch die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ ersetzt.

11. Durch räumliche Verschmierung, d. h. Ersetzung von $\Gamma d\mathfrak{s}$ durch $d\tau \operatorname{rot} \mathfrak{w}$ gelangen wir mit der Abkürzung $\mathfrak{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{w}$ von (27) zu der Formel

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{4\pi}\int d\tau\, \mathfrak{c} \times \frac{\mathfrak{e}}{r^2}\,. \tag{28}$$

Wegen

$$\operatorname*{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{e}}{r^2} \quad \text{und} \quad \operatorname*{rot}_P \frac{\mathfrak{c}}{r} = \operatorname*{grad}_P \frac{1}{r} \times \mathfrak{c}$$

($\mathfrak{c}$ hängt vom Aufpunkt P nicht ab!) kann (28) auch so geschrieben werden:

$$\mathfrak{w} = \operatorname*{rot}_P \int \frac{\mathfrak{c}\, d\tau}{4\pi r} = \operatorname*{rot}_P \mathfrak{C} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{C} = \int \frac{\mathfrak{c}\, d\tau}{4\pi r}\,, \tag{28a}$$

eine Beziehung, die explizit das von einem gegebenen Wirbelfelde induzierte Geschwindigkeitsfeld $\{\mathfrak{w}\}$ angibt, also als die im ganzen Raum eindeutige Auflösung der Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{w} = \mathfrak{c}\,, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{w} = 0 \tag{29}$$

bei gegebenem $\mathfrak{c}$ anzusehen ist. — Übrigens folgt aus dem Bau von $\mathfrak{C}$, daß $\mathfrak{C}$ (nach der Poissonschen Gleichung) der Beziehung

$$\triangle \mathfrak{C} = -\mathfrak{c}$$

genügt. Schreibt man $\operatorname{rot} \mathfrak{w} = \mathfrak{c}$ in der Form

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{C} = \mathfrak{c}\,,$$

so folgt wegen der bekannten Beziehung

$$\triangle \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{a} - \mathfrak{a}\,,$$

daß

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{C} = 0\,,$$

d. h. also

$$\operatorname{div} \mathfrak{C} = \text{const.}$$

sein muß, woraus, da $\mathfrak{C}$ im Unendlichen verschwindet, notwendig

$$\operatorname{div} \mathfrak{C} = 0 \tag{30}$$

folgt; in Worten: $\{\mathfrak{C}\}$ ist quellenfrei, eine Eigenschaft, die sich auch direkt an $\mathfrak{C}$ selbst nachprüfen läßt.

12. *Überlagerung der einzelnen Belegungen.* Bedeckt man schließlich eine Fläche gleichzeitig mit Quellen und Dipolen (bzw. Wirbeln), so überlagern sich die Eigenschaften der einzelnen Belegungen. Insbesondere kann man also normale und tangentielle Geschwindigkeitsunterschiede an einer Fläche F durch eine passende Verteilung von Quellen und Wirbeln überwinden, wobei auf ein Element do nach (14) und (24)

$$\begin{cases} \text{die Quellmasse} & do \cdot [\mathfrak{w}]^+_- \\ \text{die Wirbelmasse} & do \times [\mathfrak{w}]^+_- \end{cases} \tag{31}$$

entfällt, und die Geschwindigkeit auf der Fläche selbst

$$\mathfrak{w}_0 = \frac{\mathfrak{w}^- + \mathfrak{w}^+}{2} \tag{32}$$

wird. — Analog erhält man durch Überlagerung der Lösungen von (12) und (29) die im ganzen Raum eindeutige Lösung der Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} = e\,, \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{w} = \mathfrak{c}$$

bei gegebenem e und $\mathfrak{c}$.

§ 2. Impulsive Erzeugung von Potentialströmungen.

13. *Das Potential als Stoßdruck.* Denken wir uns in Fig. 14 die abgegrenzte Flüssigkeit zunächst ruhend, die Begrenzung als Membran, und stellen uns vor, daß auf diese

plötzlich an jeder Stelle ein impulsiver oder stoßartiger Druck, bezeichnet durch $[p]$ [8]), ausgeübt wird, so wird sich auch im Innern an jeder Stelle instantan ein Stoßdruck eingestellt haben, unter dessen Gefälle das dort befindliche Flüssigkeitsteilchen von der Masse 1 instantan von der Ruhe auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ gebracht wird (Kraftstoß = Bewegungsgröße!), d. h. es wird sein

$$\mathfrak{w} = -\operatorname{grad}[p]. \tag{33}$$

M. a. W.: Im Innern findet eine Potentialströmung statt, mit dem Potential $\varphi = -[p]$. Auf den ganzen Flüssigkeitsraum angewandt, muß der gesamte Stoßdruck gleich der mitgeteilten Bewegungsgröße sein:

$$\int \mathfrak{w}\, d\tau = \int [p]\, d\sigma' \quad \text{oder} \quad \int \operatorname{grad}\varphi\, d\tau = \int \varphi\, d\sigma. \tag{34}$$

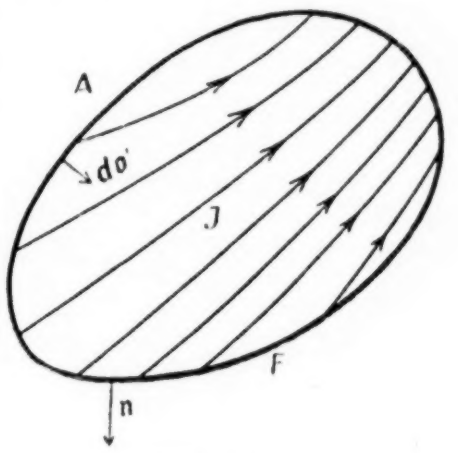


Fig. 14.

Da der Druck p und daher auch der Stoßdruck $[p]$ von Natur aus eine eindeutige Ortsfunktion ist, so können also auf diese Weise lediglich eindeutige Potentialströmungen erzeugt werden.

Denkt man sich in Fig. 14 den Innenraum I durch den Außenraum A ersetzt, so gelangt man durch Stoßdrucke auf F in der entgegengesetzten Richtung in gleicher Weise zu einer Potentialströmung $\{\operatorname{grad}\varphi\}$ im Außenraum A. Stets sollen im folgenden unter Potentialströmungen in einem Außengebiet nur die in solcher Weise (durch Stoßdrucke auf die im Endlichen liegende Begrenzung) entstandenen Strömungen verstanden werden; ihr Potential $\varphi = -[p]$ verschwindet stets im Unendlichen, da dort der Stoßdruck $[p]$ auf 0 abgeklungen ist.

Wir bemerken noch, daß der Stoßdruck an einer Stelle natürlich auch < 0 sein kann, insofern er dort eine plötzliche Verminderung des herrschenden Druckes p zur Folge hat. Da der Druck p selbst stets $\geqq 0$ ist (einen Zug kann eine Flüssigkeit nicht übertragen!), so muß nur der noch verbleibende Druck $\geqq 0$ sein, was man stets dadurch erreichen kann, daß man den ganzen Flüssigkeitsraum vor Beginn des Stoßvorganges auf einen genügend großen konstanten Druck gebracht hat (vgl. das Beispiel unter Nr. **17**).

Da eine Stoßkraft $[k]$ pro Masseneinheit die Arbeit $[k]\cdot\frac{[\mathfrak{w}]^+_-}{2}$ leistet, wo $[\mathfrak{w}]^+_-$ den durch $[k]$ bedingten Geschwindigkeitszuwachs bedeutet [9]), so ist im obigen Falle an der Oberfläche F die Arbeit $\frac{1}{2}\int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma$ aufgebracht worden, die andererseits in der kinetischen Energie steckt und dieser gleich sein muß:

$$\frac{1}{2}\int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\tau = \int \frac{\mathfrak{w}^2}{2}\, d\tau \quad \text{oder} \quad \int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = \int \operatorname{grad}^2\varphi\, d\tau, \tag{35}$$

eine Beziehung, die für alle in der obigen Weise erzeugten Potentialströmungen in I oder A gilt.

Um die Beziehung (35) auch analytisch zu beweisen, bemerken wir, daß die linke Seite offensichtlich eine additive Gebietsfunktion ist. Denken wir uns daher das Gebiet durch ein Bündel dünner Stromröhren und ein Paket benachbarter Potentialflächen in Volumelemente zerlegt, so genügt es, (35) für ein solches Element $d\tau$, wie es

---

[8]) Vgl. C. Schäfer, Einführung in die theoretische Physik **1**, 3. Aufl., Berlin 1929, S. 114—116.

[9]) Wird z. B. eine ruhende Kugel von der Masse 1 durch die Stoßkraft $[\mathfrak{k}]$ plötzlich auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ gebracht, so hat sie die Bewegungsgröße $\mathfrak{c} = [\mathfrak{k}]$ und die Energie $\frac{\mathfrak{c}^2}{2} = [\mathfrak{k}]\cdot\frac{\mathfrak{c}}{2}$.

Fig. 15 zeigt, zu beweisen. Seine Oberfläche liefert in leicht verständlicher Bezeichnungsweise den Beitrag $\left(\text{mit } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = |\operatorname{grad} \varphi| = c\right)$

$$\varphi_2 c_2 d\sigma_2 - \varphi_1 c_1 d\sigma_1$$

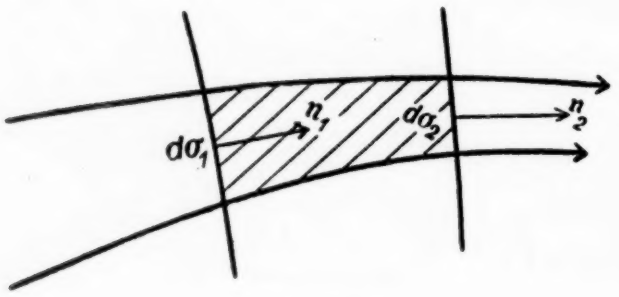


Fig. 15.

oder nach Addition und Subtraktion von $\varphi_1 c_2 d\sigma_2$

$$(36)\quad (\varphi_2 - \varphi_1)\, c_2 d\sigma_2 + \varphi_1 \{c_2 d\sigma_2 - c_1 d\sigma_1\},$$

wo der Ausdruck in der geschweiften Klammer nach der Kontinuitätsgleichung verschwindet; der Rest liefert aber bis auf vernachlässigbare Glieder höherer Ordnung

$$(37)\qquad c \cdot c\, d\tau = \operatorname{grad}^2 \varphi\, d\tau,$$

womit (35) bewiesen ist. — Denken wir uns in dem Beweis $\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ durch $\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}$ ersetzt, wo $\{\operatorname{grad} \varphi'\}$ ebenfalls eine eindeutige Potentialströmung im betrachteten Gebiete ist, und die in Fig. 5 veranschaulichte Zerlegung in Volumelemente mittels der Strömung $\{\operatorname{grad} \varphi'\}$ durchgeführt, so hätten wir an Stelle von (36)

$$(38)\qquad (\varphi_2 - \varphi_1)\, c_2' d\sigma_2 + \varphi_1 \{c_2' d\sigma_2 - c_1' d\sigma_1\}$$

und an Stelle von (37)

$$(39)\qquad c_{n'} \cdot c'\, d\tau,$$

wo $c_{n'}$ die in die Richtung von $n' = \frac{\operatorname{grad} \varphi'}{c'}$ fallende Geschwindigkeitskoordinate von grad φ bedeutet, also

$$\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi'\, d\tau$$

und damit in Erweiterung von (35) die für zwei Potentialströmungen gültige Beziehung

$$(40)\qquad \int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\sigma = \int \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi'\, d\tau$$

erhalten, aus der, da ihre rechte Seite symmetrisch in φ und φ' ist, die weitere Beziehung

$$(41)\qquad \int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\sigma = \int \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma$$

folgt. In der Auffassung von φ und φ' als Stoßdrucke läßt sich (41) in dem Satz ausdrücken: Hat man zwei (eindeutige) Potentialströmungen $\{\operatorname{grad} \varphi\}$ und $\{\operatorname{grad} \varphi'\}$, so ist die Arbeit, welche der erste Stoß φ bei der zweiten Bewegung $\{\operatorname{grad} \varphi'\}$ leistet, gleich der Arbeit, welche der zweite Stoß φ' bei der ersten Bewegung $\{\operatorname{grad} \varphi\}$ leistet. In dieser Formulierung liegt ein Spezialfall eines viel allgemeineren von Thomson [10]) stammenden Satzes für dynamische Systeme vor. Setzt man umgekehrt diesen allgemeineren Satz voraus, so ist (41) eine spezielle Anwendung von ihm.

14. Es folgt, daß es sowohl in I als auch in A eine Potentialströmung $\{\operatorname{grad} \varphi\}$ gibt, deren Geschwindigkeitspotential auf F vorgegebene Randwerte annimmt: nämlich jene Strömung, die entsteht, wenn man auf F in Richtung zum Flüssigkeitsraum den Stoßdruck $[p] = -\varphi$ ausübt; dabei ist im Falle der äußeren Aufgabe stets $\varphi(\infty) = 0$ (sog. erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie). Und daß es nur eine solche Strömung gibt, ist durch (35) garantiert: Gäbe es nämlich noch eine weitere solche

---

[10]) Vgl. Lamb, a. a. O. [4]), S. 51, und Thomson u. Tait, Handbuch der theoretischen Physik, Art. 313, Gl. (11). Wird z. B. der in Fußnote [9]) erwähnten Kugel durch einen zweiten Stoß $[\mathfrak{k}']$ die Bewegungsgröße $\mathfrak{c}'$ erteilt, so ist die Arbeit der Stoßkraft $[\mathfrak{k}]$ während der zweiten Bewegung $= [\mathfrak{k}] \cdot \frac{\mathfrak{c}'}{2} = \frac{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}'}{2} = \frac{\mathfrak{c}' \cdot \mathfrak{c}}{2}$, also in der Tat auch gleich der Arbeit der zweiten Stoßkraft bei der ersten Bewegung.

Strömung {grad φ'}, so wäre für die Strömung {grad $(\varphi - \varphi')$} die linke Seite von (35) identisch $= 0$, also auch die rechte, d. h. es wäre grad $\varphi' =$ grad φ; und auf dieselbe Weise folgt auch, daß die frühere zweite Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist. Speziell folgt noch, daß innerhalb oder außerhalb (hier mit der zusätzlichen Forderung, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruhen soll) einer starren Begrenzung die Ruhe die einzige eindeutige Potentialströmung ist $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ auf } F\right)$. — Denken wir uns auch die Lösung der zweiten Randwertaufgabe durch Stoßdrucke erzeugt (was ja stets möglich ist), so gelangen wir zu dem Resultat: Es ist stets und nur auf eine Weise möglich, durch passende Stoßdrucke auf die als Membran gedachte Begrenzung eines Flüssigkeitsbereiches jedem Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche eine ihm dort vorgeschriebene Normalgeschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ zu erteilen. Nimmt man umgekehrt dieses Resultat als anschaulich gegeben hin, so kann man mit seiner Hilfe auch die zweite Randwertaufgabe ebenso wie die erste mittels Stoßdrucken lösen. — Durch eine Kombination der beiden Konstruktionen ergibt sich auch leicht die Lösung der sog. gemischten Randwertaufgabe, in der auf einem Teil der Berandung φ und auf dem anderen $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ vorgegeben ist; daß die Lösung eindeutig ist, folgt wie früher.

15. *Zyklische Potentialströmungen.* An dieser Stelle sei noch kurz auf die Erzeugung von Potentialströmungen mit mehrdeutigem Potential φ eingegangen. Das Flüssigkeitsgebiet (das ja notwendig mehrfach zusammenhängend sein muß) bilde z. B. das Äußere A des in Fig. 16 gezeichneten durchlochten Körpers, der die Form eines aufgepumpten Fahrradschlauches hat. Denken wir uns nun den schraffierten Querschnitt (der den Körper senkrecht treffen möge) als zwei benachbarte Membranen vom Abstand a, wie ihn Fig. 17 im Seitenriß zeigt, die Oberfläche F des Körpers aber starr (in Fig. 17 doppelt schraffiert), und üben auf die positive Membran einen konstanten Stoßdruck $[p] = \Gamma$

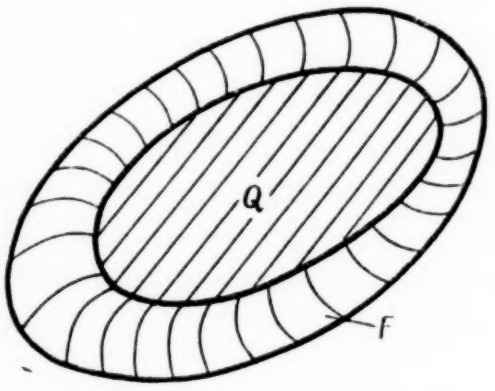


Fig. 16.

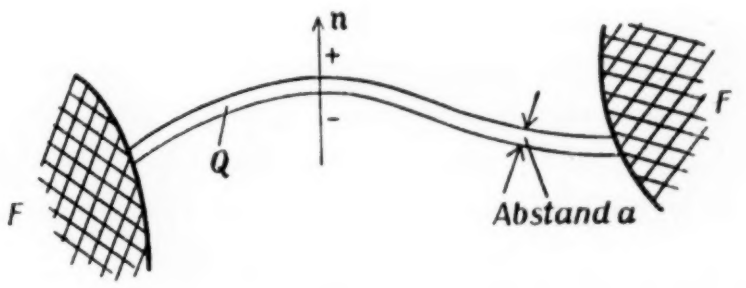


Fig. 17.

aus, so stellt sich in dem außerhalb des Körpers und der beiden Membranen befindlichen (einfach zusammenhängenden) Flüssigkeitsraum A' eine (eindeutige) Potentialströmung {grad φ'} ein mit folgenden Eigenschaften:

1. Auf der positiven Seite ist $\varphi' = -\Gamma$, auf der negativen Seite $\varphi' = 0$, d. h. φ' macht an F den konstanten Sprung $[\varphi']^+_- = -\Gamma$, woraus nach (20) weiter folgt, daß die Tangentialgeschwindigkeit $\mathfrak{w}'_t$ an F stetig ist: $[\mathfrak{w}'_t]^+_- = 0$.

2. Da auf der negativen Membran $\varphi' = 0$ ist, so kann eine Stromlinie, die darauf entspringt, nicht mehr zu dieser zurückkehren, muß also, da sie auf der starren Körperoberfläche und im Unendlichen (wegen $\varphi'(\infty) = 0$) ebenfalls nicht enden kann, zur anderen Membran führen.

Hierbei wird nun aber i. a. die Normalgeschwindigkeit $\frac{\partial \varphi'}{\partial n}$ an F einen Sprung machen, von der Größe $\left[\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right]_-^+ = \varepsilon'$. Denken wir uns dann den Zwischenraum der Membranen mit Quellen von der räumlichen Dichte $e' = \frac{-\varepsilon'}{a}$ erfüllt, und den Körper nach wie vor starr, so wird die daraus entstehende in A eindeutige Potentialströmung zusammen mit der von vorhin eine Flüssigkeitsbewegung $\{\text{grad } \varphi\}$ in A' ergeben, für die nach wie vor $[\varphi]_-^+ = -\Gamma$, $[\mathfrak{w}_t]_-^+ = 0$ ist, und für die außerdem auch die Normalgeschwindigkeit, mithin also auch die Geschwindigkeit selbst, sich an F stetig ändert. Denken wir uns also die Membranen samt ihrem Quelleninhalt zusammengezogen und entfernt, so haben wir in dem Außenraum A eine Potentialströmung, die jetzt in lauter geschlossenen Stromlinien verläuft, und deren Potential bei einem einmaligen Umgang jedesmal um Γ wächst. Haben wir einmal diese Strömung, so können wir sie nachträglich leicht durch Stoßdrucke allein erzeugen: Dazu brauchen wir offenbar den Querschnitt nur als Potentialfläche zu wählen und auf seine positive Seite den konstanten Stoßdruck $[p] = +\Gamma$ auszuüben! Gleichbedeutend damit ist, daß wir diesen Querschnitt konstant mit Dipolen der Dichte Γ belegen. Die so gewonnene Strömung $\{\text{grad } \varphi\}$ ist durch ihre „zyklische Konstante" Γ eindeutig bestimmt: Ist nämlich $\{\text{grad } \varphi'\}$ noch eine weitere solche Strömung, so stellt $\{\text{grad } (\varphi - \varphi')\}$ eine eindeutige Strömung außerhalb des starren Körpers dar, die im Unendlichen ruht, ist also nach Nr. **14** die Ruhe selbst, mithin $\text{grad } \varphi' = \text{grad } \varphi$. — Die Ausdehnung auf den Fall, daß der Körper nicht eins, sondern mehrere, z. B. n, Löcher hat, ergibt sich durch Überlagerung der für die einzelnen Querschnitte nach dem obigen Muster erhaltenen Strömungen (in der Tat konnte in unserer obigen Betrachtung der Körper außer der einen Durchbohrung, mit der wir gearbeitet haben, noch weitere solche besitzen!): Man gelangt dann zu einer n-fach zyklischen Potentialströmung mit den den einzelnen n Querschnitten zugeordneten zyklischen Konstanten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$.

16. Indem wir uns weiter an unseren speziellen Fall des einfach durchbohrten Körpers halten, fassen wir zusammen: Man kann stets (und auf mannigfache Art) einen solchen Querschnitt wählen, daß bei Ausübung des konstanten Stoßdruckes Γ auf seine positive Seite sich die zu Γ als zyklische Konstante gehörige eindeutig bestimmte Potentialströmung $\{\text{grad } \varphi\}$ einstellt; ihre Erzeugung kommt einer Dipolbelegung dieses Querschnittes mit der Dichte Γ gleich. Bestimmen wir noch dabei die geleistete Arbeit! Auf der Fläche F (die wir uns hier ebenfalls als Membran denken müssen) wird wohl der Stoßdruck $[p] = -\varphi$ (der die Starrheit von F ersetzt) ausgeübt, leistet jedoch keine Arbeit, da dort $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ ist. Bleibt also nur die Arbeit am Querschnitt Q; diese ist

$$\frac{1}{2}\int [p]\,\frac{\partial \varphi}{\partial n}\,d\sigma = \frac{1}{2}\,\Gamma \int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,d\sigma = \frac{1}{2}\,\Gamma\, E\,,$$

wo E die durch den Querschnitt pro Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsmenge ist. Sie muß gleich der kinetischen Energie der Strömung sein:

$$\Gamma \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,d\sigma = \Gamma\, E = \int_A \text{grad}^2 \varphi\, d\tau\,.$$

Überlagert man der zyklischen Strömung $\{\text{grad } \varphi\}$ eine beliebige eindeutige Potentialströmung $\{\text{grad } \psi\}$ im Außenraum A des Körpers (die also durch Stoßdrucke auf die jetzt als Membran gedachte Oberfläche entsteht), so gelangt man zur allgemeinsten Potentialströmung $\{\text{grad } \Phi\}$ mit $\Phi = \varphi + \psi$ in diesem Raum; dabei wird auf F jetzt die Arbeit

$$\frac{1}{2}\int_F (\varphi + \psi)\frac{\partial \psi}{\partial n}\,d\sigma = \frac{1}{2}\int_F \Phi \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

und am Querschnitt Q die Arbeit $\frac{1}{2}\,\Gamma \int_Q \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) d\sigma$ geleistet, sodaß man insgesamt

$$\frac{1}{2}\int_F \Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{1}{2}\,\Gamma \int_Q \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

erhält, eine Beziehung, in der man offensichtlich im ersten Integral links die vorkommende Normalgeschwindigkeit durch $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ ersetzen darf; also muß sein:

$$\int_F \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}\,d\sigma + \Gamma \int_Q \frac{\partial \Phi}{\partial n}\,d\sigma = \int_A \operatorname{grad}^2 \Phi\, d\tau\,. \tag{42}$$

(42) erweitert die frühere Beziehung (35) auf den Fall zyklischer Potentialströmungen und hätte auch sofort aus dieser durch Anwendung auf den Raum A' (in dem ja Φ eindeutig ist) erhalten werden können. Derselbe Gedankengang oder aber unsere bisherige direkte Betrachtungsweise liefert auch die zu (40) und (41) analogen Beziehungen (wo $\{\operatorname{grad} \Phi'\}$ eine Strömung vom gleichen Charakter wie $\{\operatorname{grad} \Phi\}$ bedeutet):

$$\int_F \Phi \frac{\partial \Phi'}{\partial n}\,d\sigma + \Gamma \int_Q \frac{\partial \Phi'}{\partial n} = \int_A \operatorname{grad} \Phi \cdot \operatorname{grad} \Phi'\, d\tau \tag{43}$$

$$\int_F \Phi \frac{\partial \Phi'}{\partial n} + \Gamma \int_Q \frac{\partial \Phi'}{\partial n} = \int_F \Phi' \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \Gamma' \int_Q \frac{\partial \Phi}{\partial n}\,, \tag{44}$$

wobei die letzte Relation wieder die Gleichheit der Arbeit zweier Impulse ausspricht.

§ 3. Erzeugung eindeutiger Potentialströmungen aus Quellen und Dipolen.

17. $\{\operatorname{grad} \varphi\}$ sei z. B. eine eindeutige Potentialströmung im Außenraum A der in Fig. 18 gezeichneten Fläche F. Denken wir uns dann den Innenraum I ebenfalls von Flüssigkeit erfüllt, die vorab ruhen möge, so daß das zugehörige Potential φ' zu 0 angenommen werden darf, so gelangen wir zu einer Strömung im ganzen Raum $R = I + A$, für welche F eine Unstetigkeitsfläche sowohl bezüglich der normalen wie tangentiellen Geschwindigkeit darstellt. Nach früherem (Nr. **5** und **7**) können wir also diese Strömung durch eine passende Verteilung von Quellen und Dipolen auf F erzeugen. Die diesbezüglichen Dichten sind $[\mathfrak{w}]^+_- \cdot \mathfrak{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ und $= -\varphi$, so daß nach (5) und (6) also sein muß:

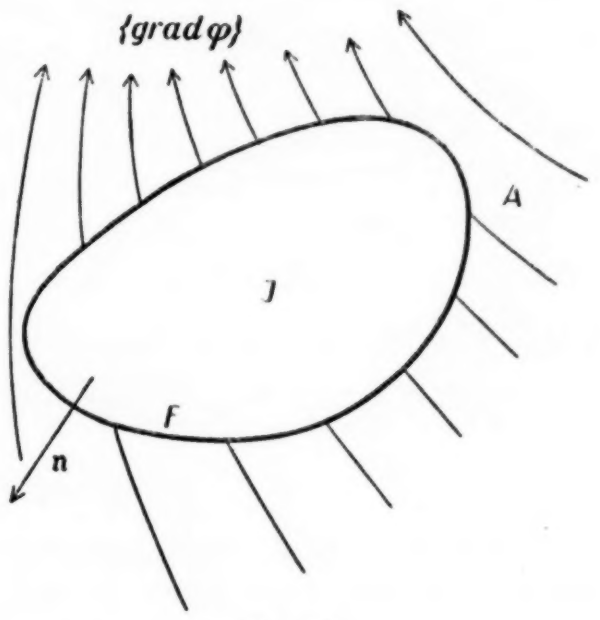


Fig. 18.

$$\int_F \frac{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)}{4\pi r} + \int_F \frac{-(-\varphi)}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \begin{cases} \varphi & \text{in } A \\ 0 & \text{in } I\,. \end{cases} \tag{45}$$

Wären wir statt von der Ruhe von einer beliebigen (eindeutigen) Potentialströmung $\{\operatorname{grad} \varphi'\}$ in I ausgeganegen, so hätten wir für die Quellen und Dipole bzw. die Dichten $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right)$ und $-(\varphi - \varphi')$, d. h. an Stelle von (45) die erweiterte Beziehung

$$\int_F \frac{-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right)}{4\pi r} + \int_F \frac{-(-(\varphi - \varphi'))}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \begin{cases} \varphi & \text{in } A \\ \varphi' & \text{in } I \end{cases} \tag{46}$$

erhalten (wobei die Verteilung der Singularitäten durch die in der rechten Seite zum Ausdruck kommende Forderung eindeutig bestimmt ist), die also aussagt, daß man die Strömung $\{\text{grad } \varphi\}$ im Außenraum A auf ebenso viele Arten durch eine Verteilung von Quellen und Dipolen auf der Oberfläche F erzeugen kann, wie es im Innengebiet eindeutige Potentialströmungen $\{\text{grad } \varphi'\}$ gibt. Ähnliches gilt auch für den Innenraum I. — Durch passende Wahl von $\{\text{grad } \varphi'\}$ können wir nun erreichen, daß entweder nur die normale oder nur die tangentielle Geschwindigkeit an F einen Sprung erleidet, und gelangen so zu einer (jeweils eindeutig bestimmten) Verteilung von Quellen allein oder Dipolen allein, die in A die Strömung $\{\text{grad } \varphi\}$ erzeugen: Denken wir uns F als doppelte Membran und die gegebene Strömung durch den Stoßdruck $[p] = -\varphi$ auf die äußere Membran erzeugt, so brauchen wir auf die andere Membran das eine Mal nur mit demselben Stoßdruck zu drücken, so daß also $\varphi' = \varphi$ wird, um zu der Quellverteilung $\left(\text{mit der Dichte } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right)\right)$ zu gelangen, und das andere Mal nur jenen Stoßdruck auszuüben, welcher die normale Geschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ erzeugt, so daß $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ wird, um zu der Dipolverteilung (mit der Dichte $-(\varphi - \varphi')$) zu gelangen.

Jedes Singularitätensystem Δ_0 auf F, das in A die gegebene Strömung $\{\text{grad } \varphi\}$ erzeugt, nennen wir ein zu $\{\text{grad } \varphi\}$ gehörendes Singularitätensystem auf F; Δ_0 kann also bestehen aus

a) Quellen und Dipolen;

b) Quellen allein;

In dem speziellen Fall, daß wir einen Körper in einer zunächst ruhenden Flüssigkeit plötzlich auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{U}$ bringen (Fig. 19), übt die starre Oberfläche auf die Flüssigkeit Stoßdrucke aus, so daß also im Außenraum A eine Potentialströmung $\{\text{grad } \varphi\}$ mit der Eigenschaft $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n}$ entsteht. Wählen wir als zugehöriges Singularitätensystem lauter Dipole, so müssen diese im Innern I eine Potentialströmung mit derselben Normalgeschwindigkeit $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n}$ auf F ergeben, eine Bedingung, die offenbar von der Parallelströmung $\{\mathfrak{U}\}$ in I (und wegen der Eindeutigkeit der Lösung auch nur von dieser) erfüllt wird. Man kann also die Stromlinien in A unmittelbar durch den Körper hindurch gemäß Fig. 19 schließen.

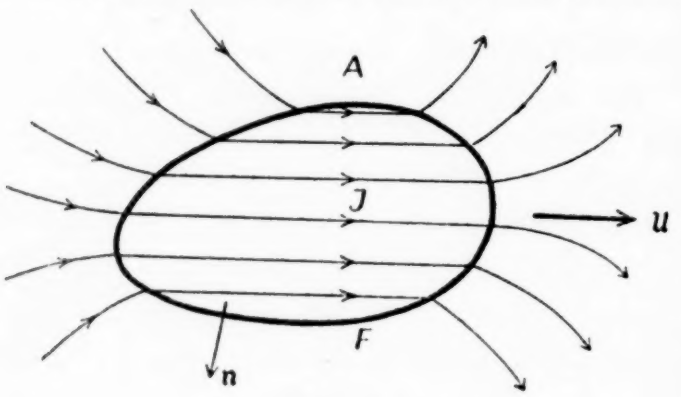


Fig. 19.

§ 4. Ersetzung eines Körpers durch Singularitäten.

18. Wir sind jetzt imstande, einen Körper, d. h. dessen starre Oberfläche F (denn nur um diese kann es sich ja handeln, da das Innere des Körpers z. B. auch hohl sein kann) durch Singularitäten zu ersetzen. F zerlege den Raum wieder in ein Innen- und Außengebiet I bzw. A. Die Strömung sei so beschaffen, wie sie später (mit einer geringen Einschränkung) vorkommen wird, d. h. es handle sich um eine Strömung $\{\mathfrak{w}\}$ um den Körper, die im Endlichen beliebige Singularitäten besitzt und im Unendlichen in eine Parallelströmung $\{\mathfrak{U}\}$ übergeht, wobei auch $\mathfrak{U} = 0$ sein kann. Die Gesamtheit der in A befindlichen Singularitäten von $\{\mathfrak{w}\}$ sei Δ_a. — Nennen wir nun allgemein ein durch eine geschlossene Fläche abgegrenztes Singularitätensystem abgeschlossen, wenn alle Wirbelfäden sich in ihm schließen, andernfalls offen, so wird das Singularitätensystem Δ_a der gegebenen Strömung i. a. offen sein; die Gesamtheit der

auf F entspringenden und dort (notwendigerweise) wieder mündenden Wirbelfäden bezeichnen wir mit P. Jedes innerhalb oder auf F liegende Singularitätensystem Δ_i, das zusammen mit Δ_a und $\{\mathfrak{U}\}$ im Außenraum A die gegebene Strömung $\{\mathfrak{w}\}$ um die Fläche F erzeugt, ist als ein die starre Fläche F in bezug auf die gegebene Strömung ersetzendes Singularitätensystem anzusprechen; durch Δ_i wird $\mathfrak{w}$ eindeutig in das Innere I fortgesetzt. Wir werden jetzt eine ganze Klasse solcher Singularitätensysteme aufzeigen, und betrachten zunächst den Spezialfall, daß Δ_a abgeschlossen ist.

Spezialfall: Δ_a ist abgeschlossen (Fig. 20). $\{\mathfrak{w}^*\}$ sei die Strömung ohne den Körper, also bedingt durch Δ_a und $\{\mathfrak{U}\}$ und definiert im ganzen Raum $R = I + A$. Um nun in A von $\{\mathfrak{w}^*\}$ wieder auf $\{\mathfrak{w}\}$ zu kommen, brauchen wir dort der Strömung $\{\mathfrak{w}^*\}$ nur jene (eindeutige und eindeutig bestimmte) Potentialströmung $\{\text{grad } \varphi\}$ zu überlagern, deren Normalkoordinate $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ jene von $\{\mathfrak{w}^*\}$ gerade aufhebt: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \mathfrak{w}^* \cdot \mathfrak{n} = 0$, was stets durch passende Stoßdrucke auf die als Membran gedachte Fläche F möglich ist. Jedes Singularitätensystem Δ_0 auf F, das zu $\{\text{grad } \varphi\}$ im Sinne von Nr. **17** gehört, ersetzt dann die starre Fläche F, ist also als ein Singularitätensystem Δ_i zu bezeichnen:

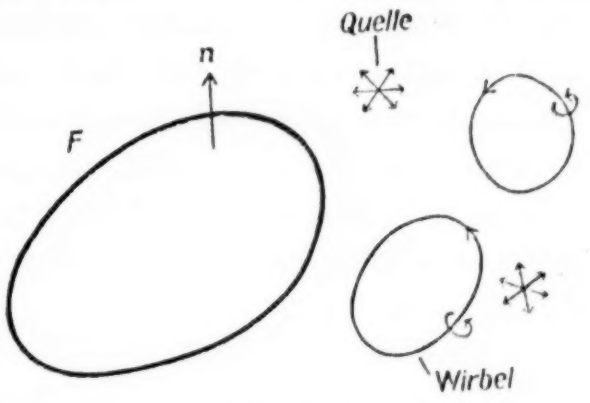


Fig. 20.

$$\Delta_i = \Delta_0 \text{ [11])} . \tag{47}$$

Besteht Δ_0 nur aus Dipolen, so ist wegen $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auch auf der Innenseite von F

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} + \mathfrak{w}^* \cdot \mathfrak{n} = 0 ,$$

d. h. die Flüssigkeit strömt auch in I glatt ab, muß also (da $\{\mathfrak{w}^*\}$ in I offenbar eine eindeutige Potentialströmung ist) dort ruhen. Ersetzen wir hierauf die Dipole durch Wirbel, so bilden diese ein Singularitätensystem, das wir offenbar auch direkt nach der folgenden Methode des Totwassers erhalten können: Denken wir uns in der gegebenen Strömung $\{\mathfrak{w}\}$ den Körper durch ruhende Flüssigkeit (sog. Totwasser) ersetzt, so bildet das durch den tangentiellen Geschwindigkeitssprung auf F eindeutig bestimmte Wirbelsystem gerade das Singularitätensystem von vorhin. Wir bemerken noch, daß diese Methode des Totwassers augenscheinlich nicht an unsere besondere Voraussetzung, daß Δ_a abgeschlossen ist, gebunden ist.

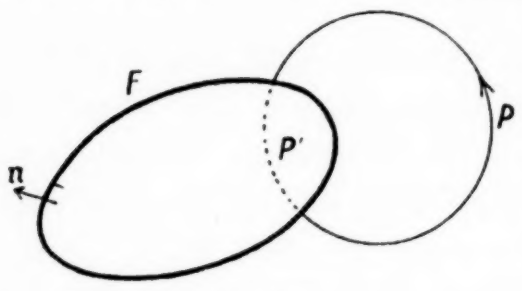


Fig. 21.

Der allgemeine Fall (Fig. 21). Indem wir hier die evtl. vorhandenen offenen Wirbel P durch innerhalb F verlaufende Schlußstücke P′ schließen, was stets möglich ist, entsteht ein abgeschlossenes Singularitätensystem $\Delta_a' = \Delta_a + \mathsf{P}'$, auf das wir die Überlegung des Spezialfalles anwenden können: $\{\mathfrak{w}^*\}$ sei die durch Δ_a' und $\{\mathfrak{U}\}$ induzierte Strömung in A mit $\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \mathfrak{w}^* \cdot \mathfrak{n} = 0$, Δ_0 ein zu $\{\text{grad } \varphi\}$ gehörendes Singularitätensystem auf F. Jedes Singularitätensystem $\Delta_0 + \mathsf{P}'$ ersetzt dann die starre Fläche F, ist also ein System Δ_i:

$$\Delta_i = \Delta_0 + \mathsf{P}' \text{ [12])} . \tag{48}$$

---

[11]) Jede Strömung, die außerhalb F die Ruhe ist, ergibt ein (notwendigerweise innerhalb F liegendes) Singularitätensystem Δ_i', das zu dem obigen addiert das allgemeinste derartige System liefert.

[12]) Auch hier gilt das in Fußnote [11]) Gesagte.

Δ_0 kann speziell aus Quellen allein oder aus Dipolen bzw. Wirbeln allein bestehen; nimmt man lauter Wirbel, so ergeben sie zusammen mit P' ebenfalls ein Wirbelsystem. Ein spezielles derartiges System liefert wieder die Methode des Totwassers. In der Auffassung von vorhin entsteht dieses dadurch, daß wir Δ_0 als Wirbel nehmen, die Schlußstücke P' von innen her auf die Fläche legen und die Wirbel dort passend verschieben, bis im Innern Ruhe eintritt.

Daß wir hier z. B. mit einer alleinigen Quellverteilung auf F nicht mehr durchkommen, hat seinen Grund darin, daß i. a. eine geschlossene Kurve auf F eine Zirkulation ergibt, d. h. daß die Strömung $\{\mathfrak{w}\}$ um den Körper zirkuliert: Denken wir uns nämlich die Wirbellinien zu lauter kleinen Röhren von derselben konstanten Zirkulation, die $= 1$ angenommen werden darf, zusammengefaßt, und über die Fläche F eine im freien Zustande sich völlig auf einen Punkt zusammenziehende Gummischlinge hinweggeschoben, so wird längs ihr die Zirkulation jeweils gleich der Zahl der bereits geschnittenen Wirbelröhren (mit dem richtigen Vorzeichen gerechnet) sein. Das in Fig. 21 gezeichnete Schlußstück des Wirbelfadens entspricht völlig dem tragenden Faden der Prandtlschen Tragflügeltheorie [13]).

Man beachte, daß die hier durchgeführte Konstruktion rein kinematisch ist: So haben wir z. B. im Falle der Methode des Totwassers über die Größe des konstanten Druckes im Innern nichts vorausgesetzt und auch nirgends die Größe dieses Druckes bei unserer Konstruktion benutzt. Später werden wir in einem speziellen Falle (Zusatz zu Nr. 29) die Größe dieses Druckes im Innern bestimmen.

Zweiter Abschnitt. Einführung des Begriffs der Haltekraft.

§ 5. Die Haltekräfte der Singularitäten.

19. Wir schicken zwei bekannte Vektorbeziehungen voraus. Wird $\{\mathfrak{w}\}$ als Geschwindigkeitsfeld aufgefaßt, so gilt für die „konvektive" Beschleunigung $(\mathfrak{w}\cdot\nabla)\mathfrak{w}$:

$$(\mathfrak{w}\cdot\nabla)\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\frac{\mathfrak{w}^2}{2} + \operatorname{rot}\mathfrak{w}\times\mathfrak{w}\,. \tag{49}$$

Ferner folgt aus dem bekannten Gaußschen Satz für eine geschlossene Fläche

$$\int \mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{o} = \int \operatorname{div}\mathfrak{w}\, d\tau$$

sofort die allgemeinere Beziehung

$$\int u\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} = \int u\operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\tau + \int(\mathfrak{v}\cdot\nabla)\,u\, d\tau\,. \tag{50}$$

$\{\mathfrak{v}\}$ sei eine stationäre Flüssigkeitsströmung in einem gewissen endlichen Gebiet G mit der Oberfläche O. Eine solche Strömung wird nun i. a. nicht möglich sein, ohne daß nicht innerhalb G Fremd- oder Haltekräfte an den einzelnen singulären Stellen (mit $\operatorname{div}\mathfrak{v}\neq 0$, $\operatorname{rot}\mathfrak{v}\neq 0$) wirksam sind. Wir bezeichnen diese Haltekräfte generell mit $\mathfrak{K}_h$, ihre (stets auf einen festen Punkt bezogenen) Momente mit $\mathfrak{M}_h$, also $\mathfrak{M}_h = \mathfrak{r}\times\mathfrak{K}_h$. Um diese Kräfte zu bestimmen, brauchen wir nur das Newtonsche Grundgesetz der Mechanik

$$\left\{\begin{matrix}\text{Änderung der}\\ \text{Bewegungsgröße}\\ \text{in der Zeiteinheit}\end{matrix}\right\} = \text{Summe aller wirkenden Kräfte}$$

auf unseren Bereich G anzuwenden, und erhalten sofort

$$\begin{aligned}\int_G \mathfrak{K}_h d\tau &= \int_O (\mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + p\, d\mathfrak{o})\\ \int_G \mathfrak{M}_h d\tau &= \int_O \mathfrak{r}\times(\mathfrak{v}\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o} + p\, d\mathfrak{o})\,.\end{aligned} \tag{51}$$

---

[13]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie, I. Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1918, S. 14.

Gilt nun auf der Oberfläche O die Bernoullische Gleichung

$$p + \frac{v^2}{2} = C \tag{52}$$

(wobei die Konstante C für jeden einzelnen geschlossenen Teil der Oberfläche eine andere sein kann), so wird aus (51)

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{K}_h d\tau &= \int \left(\mathfrak{v}\mathfrak{v} \cdot do - \frac{\mathfrak{v}^2}{2} do \right) \\ \int \mathfrak{M}_h d\tau &= \int \mathfrak{r} \times \left(\mathfrak{v}\mathfrak{v} \cdot do - \frac{\mathfrak{v}^2}{2} do \right), \end{aligned} \tag{53}$$

woraus man mittels (49) und (50) sofort die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_G \mathfrak{K}_h d\tau &= \int_G (\mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v})\, d\tau \\ \int_G \mathfrak{M}_h d\tau &= \int_G \mathfrak{r} \times (\mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v})\, d\tau \end{aligned} \tag{54}$$

erhält, die aussagen, daß wir bei der Integration über das Gebiet G annehmen dürfen, daß pro Volumelement $d\tau$ die Haltekraft

$$\mathfrak{K}_h = \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \tag{55}$$

beträgt. Die tatsächliche Haltekraft wird sich von dieser i. a. um eine Zusatzkraft unterscheiden, die jedoch von solcher Art ist, das ihre Resultante bzw. ihr resultierendes Moment, genommen über G, verschwindet, eine Erscheinung, die ja bekanntlich immer eintritt, wenn man von einem Integralgesetz auf ein zugehöriges Differentialgesetz schließt.

Ist die Strömung wirbel- oder quellenfrei, so enthält die zugehörige Haltekraft $\mathfrak{K}_h$ die früher angegebenen (1) und (2) als Spezialfall in sich, von denen sie umgekehrt die sinngemäße Verallgemeinerung darstellt. — Schreibt man in diesen Fällen für $\mathfrak{v}$ das eine Mal $\mathfrak{E}$, das andere Mal $\mathfrak{H}$, so stellt $\mathfrak{K}_h$ die Kraftdichte (d. h. Kraft pro Volumen) dar, die in einem elektrostatischen bzw. einem von geschlossenen Strömen erzeugten magnetischen Felde mit den Feldstärken $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}$ herrscht.

In dem Falle, daß nur Wirbel vorkommen, kann die Haltekraft $\mathfrak{K}_h = \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}$ verschwinden, so daß also der zugehörige Wirbel frei ist: Es folgt dann, daß notwendig $\operatorname{rot} \mathfrak{v} \parallel \mathfrak{v}$ ist, was bedeutet, daß an solchen Stellen die Wirbellinie in die Richtung der Stromlinie fällt; ein bekanntes Beispiel hierfür sind die von einem Prandtlschen Tragflügel abgehenden Wirbelfäden. — Bei ebenen Strömungen, wo, wie später gezeigt werden wird, die Haltekraft ebenfalls $\mathfrak{K}_h = \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}$ ist, kann der vorhin besprochene Fall offenbar nicht eintreten, da hier der Wirbelvektor stets auf der Strömungsebene senkrecht steht.

Da die Haltekraft $\mathfrak{K}_h$ an allen nicht singulären Stellen verschwindet, so dürfen wir aueh die Integrationen in (54) rechts statt über G nur über das zu G gehörige Singularitätensystem Σ erstrecken. Da $\mathfrak{K}_h$ ferner linear in den Singularitäten $\operatorname{div} \mathfrak{v}$, $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$, wie in der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist, so gibt jede Zerlegung des Singularitätengebietes bzw. jede lineare Zerlegung der Geschwindigkeit Anlaß zu einer entsprechenden Zerlegung von $\mathfrak{K}_h$. Es wird sich dann als zweckmäßig erweisen, wenn wir die folgende Verabredung treffen: Ist Σ irgendein Singularitätensystem einer Strömung $\{\mathfrak{v}\}$ und $\{\mathfrak{u}\}$ irgendein Geschwindigkeitsfeld (das in den Punkten von Σ definiert ist), so sei

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{u} \\ \Sigma \end{matrix} \right\} = \int_\Sigma (\mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{u}) \text{ bzw. } = \int_\Sigma \mathfrak{r} \times (\mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{u}), \tag{56}$$

wo wir die rechts stehenden Ausdrücke deuten können als die Haltekraft bzw. das Haltemoment des Singularitätensystems Σ in der Strömung $\{\mathfrak{u}\}$. Ist Σ flächenhaft, so denken wir uns Σ stets etwas räumlich verschmiert und die Integrationen in (56) als Grenzfall der entsprechenden räumlichen Integrationen aufgefaßt.

20. Sei nun speziell das Singularitätensystem Σ von G abgeschlossen, und $\{\mathfrak{v}\}$ die von ihm im ganzen Raume induzierte Strömung. Dann kann auf der rechten Seite von (53) die Oberfläche O speziell als eine ins Unendliche sich ausweitende Kugel K_∞ angenommen werden: Beachtet man dann, daß $\mathfrak{v}$ dort von der Größenordnung $\frac{1}{r^2}$ ist, so sieht man, daß im Grenzfalle die rechten Seiten von (53) und daher auch die linken verschwinden; d. h. aber in der Bezeichnungsweise von (56), daß

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma\end{matrix}\right\} = 0 \text{ [14])} \quad (\Sigma \text{ abgeschlossen; } \{\mathfrak{v}\} \text{ von } \Sigma \text{ erzeugt}) \tag{57}$$

ist. (Analog üben z. B. elektrische Teilchen insgesamt weder eine Kraft noch ein Moment auf sich aus.) Spalten wir Σ und entsprechend auch $\mathfrak{v}$ in zwei Teile

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2\,, \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$$

auf, so können wir für (57) auch schreiben:

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma_1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\} = 0. \tag{57a}$$

Ist nun Σ_1 und daher auch Σ_2 wieder abgeschlossen, so sind auf jedes dieser Systeme wieder die Beziehungen anwendbar, d. h. aber wir dürfen in (57a) die von dem betreffenden Singularitätensystem Σ_1 bzw. Σ_2 induzierte Eigengeschwindigkeit unterdrücken, was wir durch einen rechtsseitigen oberen Strich andeuten wollen:

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma_1\end{matrix}\right\}' + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\}' = 0 \tag{58}$$

oder explizit

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}_2\\ \Sigma_1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}_1\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\} = 0\,. \tag{58a}$$

§ 6. Begründung der Lagallyschen Formeln.

21. Für später merken wir die beiden Beziehungen an:

$$\int_I \operatorname{div} \mathfrak{w}\, d\tau = 0 \qquad \text{(für das Innere } I \text{ einer starren Fläche } F) \tag{59}$$

$$\int \operatorname{rot} \mathfrak{w}\, d\tau = 0 \qquad \text{(für eine geschlossene Wirbelröhre).} \tag{60}$$

(59) drückt aus, daß die Gesamtergiebigkeit innerhalb F verschwinden muß. (60) beweist man so: Ist $d\mathfrak{f}$ ein senkrechter Querschnitt der (dünnen) Wirbelröhre, $d\Gamma$ ihre Stärke, und $d\tau = d\mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{s}$ das zu $d\mathfrak{s}$ gehörige Volumelement, so ist wegen $d\mathfrak{f} \parallel d\mathfrak{s}$:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{w}\, d\tau = \operatorname{rot} \mathfrak{w}\, df \cdot d\mathfrak{s} = d\mathfrak{s} \operatorname{rot} \mathfrak{w} \cdot d\mathfrak{f} = d\mathfrak{s}\, d\Gamma\,, \tag{61}$$

eine Beziehung, aus der durch Integration über die Röhre sofort (60) folgt.

$\{\mathfrak{w}\}$ sei eine stationäre Strömung um einen Körper, die beliebige Singularitäten (Quellen und Wirbel) besitzen möge, die alle im Endlichen liegen, und die im Unendlichen in eine Parallelströmung $\{\mathfrak{U}\}$ übergeht; an der Oberfläche F des Körpers gelte die Bernoullische Gleichung (52). F teile den ganzen Raum R in ein Innen- und Außengebiet I bzw. A:

$$R = I + A\,.$$

Da $\{\mathfrak{w}\}$ im Unendlichen eine Potentialströmung ist, so ist dort die Bernoullische Gleichung von selbst erfüllt. Denken wir uns daher F durch ein Singularitätensystem ersetzt, so gilt sowohl an der Begrenzung von A (zu der außer F auch die unendlich ferne Kugel K_∞ zu zählen ist) wie I die Bernoullische Gleichung, d. h. man darf für diese Gebiete als Haltekraft der Singularitäten die durch (55) gegebene ansehen.

---

[14]) Vgl. hierzu Betz, a. a. O. [3]), S. 456—457.

Gesucht sind die Kraft $\mathfrak{K}_F$ bzw. das Moment $\mathfrak{M}_F$, welches die Fläche F auf die Flüssigkeit, bzw. umgekehrt diese auf die Fläche ausübt. Wegen der Bernoullischen Gleichung hat man für $\mathfrak{K}_F$ und $\mathfrak{M}_F$ die Ausdrücke

$$(62)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_F = \int\limits_F \left(-\frac{\mathfrak{w}^2}{2}\right) d\mathfrak{o} \\ \mathfrak{M}_F = \int\limits_F \mathfrak{r} \times \left(-\frac{\mathfrak{w}^2}{2}\right) d\mathfrak{o}\,, \end{cases}$$

und es kann sich im folgenden nur darum handeln, diese Ausdrücke so umzuformen, daß der Einfluß der einzelnen Singularitäten (zu denen auch die Fläche F selbst bzw. das sie ersetzende Singularitätensystem Δ_i zu zählen ist) möglichst in Evidenz gesetzt ist.

Indem wir nun die Kraft $\mathfrak{K}_F$ bzw. das Moment $\mathfrak{M}_F$, das die Fläche F auf die Flüssigkeit ausübt, mit zu den Fremd- oder Haltekräften zählen, ergibt das Newtonsche Grundgesetz, angewandt auf das Flüssigkeitsgebiet A, sofort die den Gleichungen (53) entsprechenden Beziehungen

$$(63)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_F + \int\limits_A \mathfrak{K}_h d\tau = \int\limits_{K_\infty} \left(\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{o} - \frac{\mathfrak{w}^2}{2}\, d\mathfrak{o}\right) = \mathfrak{K}_\infty \\ \mathfrak{M}_F + \int\limits_A \mathfrak{M}_h d\tau = \int\limits_{K_\infty} \mathfrak{r} \times \left(\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{o} - \frac{\mathfrak{w}^2}{2}\, d\mathfrak{o}\right) = \mathfrak{M}_\infty \end{cases}$$

mit $\mathfrak{K}_h = \mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}$, die wir unter Benutzung des Symbols (56) in die eine Gleichung zusammenfassen können:

$$(63\,a)\qquad \mathfrak{K}_F \text{ bzw. } \mathfrak{M}_F + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_a\end{matrix}\right\} = \mathfrak{K}_\infty \text{ bzw. } \mathfrak{M}_\infty\,.$$

Denken wir uns F durch ein Singularitätensystem Δ_i (das wir der folgenden Integrationen wegen stets etwas räumlich verschmiert annehmen) ersetzt, so liefert derselbe Gedankengang wie vorhin die Beziehung

$$(64)\qquad \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_a\end{matrix}\right\} = \mathfrak{K}_\infty \text{ bzw. } \mathfrak{M}_\infty$$

oder, wenn wir für die linke Seite $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta\end{matrix}\right\}$ schreiben und beachten, daß wir hierin nach (57) die Eigengeschwindigkeit von $\Delta = \Delta_i + \Delta_a$ vernachlässigen, d. h. $\mathfrak{w}$ durch $\mathfrak{U}$ ersetzen dürfen:

$$(65)\qquad \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta\end{matrix}\right\} = \mathfrak{K}_\infty \text{ bzw. } \mathfrak{M}_\infty\,.$$

Aus (63) und (64) folgt

$$(66)\qquad \mathfrak{K}_F \text{ bzw. } \mathfrak{M}_F = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\}$$

und aus (63) und (65)

$$(67)\qquad \mathfrak{K}_F \text{ bzw. } \mathfrak{M}_F = -\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta\end{matrix}\right\}$$

oder explizit (wobei in (67) alle Vorzeichen gewechselt werden [15])):

$$(68)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_F = \int\limits_I (\mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}) \\ \mathfrak{M}_F = \int\limits_I \mathfrak{r} \times (\mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}) \end{cases}$$

$$(69)\qquad \begin{cases} -\mathfrak{K}_F = \int\limits_A (\mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}) - \int\limits_R \mathfrak{U}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{U}) \\ -\mathfrak{M}_F = \int\limits_A \mathfrak{r} \times (\mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}) - \int\limits_R \mathfrak{r} \times (\mathfrak{U}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{U})\,. \end{cases}$$

[15]) Man beachte, daß z. B. der Druck der Flüssigkeit auf die Wandung im Falle des inneren Problems durch unser $\mathfrak{K}_F$, im Falle des äußeren durch $-\mathfrak{K}_F$ gegeben ist!

Gemäß (60) darf man in dem letzten Integral rechts für $-\mathfrak{R}_F$ das Glied mit rot $\mathfrak{w}$ unterdrücken und braucht dann weiter wegen (59) das verbleibende Integral nur noch über den Außenraum A zu erstrecken. (68) sind die Lagallyschen Formeln für das Innere (und zwar für das hier vorliegende Singularitätensystem Δ_i), (69) die für das Äußere.

Man sieht: Um ein vollständiges Bild von dem System der Singularitäten zu bekommen, das einen Körper ersetzt, hat man sich an diesen Singularitäten die entsprechenden Haltekräfte angebracht zu denken.

Der hier gebrachte Gedankengang läßt sich statt auf geschlossene natürlich auch auf offene (starre) Oberflächen anwenden. Als Beispiel betrachten wir ein Stück der Oberfläche des Halbkörpers, welcher der Strömung in Fig. 1a entspricht. Es sei bereits so lang gewählt, daß an seinem Ende die Abflußgeschwindigkeit zu $\mathfrak{U}$ und daher der Druck zu 0 angenommen werden darf. Ist dann $\mathfrak{R}_F$ der Druck der Schale auf die Flüssigkeit, so ergibt das Newtonsche Grundgesetz angewandt auf den Bereich, der von der festen Schale und deren Grundfläche gebildet wird, sofort

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta\end{matrix}\right\} + \mathfrak{R}_F = e\mathfrak{U}\,.$$

Da nun im Gebiet Δ der Quellen deren Eigengeschwindigkeiten vernachlässigbar sind, hat man

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta\end{matrix}\right\} = e\mathfrak{U}\,,$$

mithin also

$$\mathfrak{R}_F = 0\,.$$

Für die Außenströmung bedeutet dies dann: ein Halbkörper erleidet in einer Parallelströmung keinen (Druck-)Widerstand [16]).

22. *Diskrete Singularitäten.* Wir betrachten den Fall, daß nur isolierte kleine Quellgebiete Δ_q der Ergiebigkeit e bzw. isolierte dünne (geschlossene) Wirbelröhren Δ_w der Stärke Γ auftreten und sich auf punktförmige Quellen bzw. linienförmige Wirbel (Wirbelfäden) derselben Ergiebigkeit e bzw. derselben Stärke Γ zusammenziehen. Nach (57) dürfen wir dann bei der Berechnung der zugehörigen Haltekräfte bzw. -momente die Eigengeschwindigkeit des betreffenden Singularitätengebietes Δ_q oder Δ_w unterdrücken; die jeweils verbleibende Geschwindigkeit $\mathfrak{w}^*$ ist dann innerhalb eines solchen Quellgebietes Δ_q bzw. einer solchen Wirbelröhre Δ_w stets endlich und stetig, so daß man unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen darf. Man erhält dann für die Quelle

$$\text{(70a)}\qquad \mathfrak{R}_h = \int\limits_{\Delta_q} \mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}\,d\tau = \int\limits_{\Delta_q} \mathfrak{w}^*\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}\,d\tau \longrightarrow e\mathfrak{w}^*$$

und analog

$$\text{(70b)}\qquad \mathfrak{M}_h = \mathfrak{r} \times e\mathfrak{w}^*\,,$$

und für den Wirbelfaden mit dem Linienelement $d\mathfrak{s}$ unter Beachtung von (61)

$$\text{(71a)}\qquad \mathfrak{R}_h = \int\limits_{\Delta_w} \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}\,d\tau = \int \mathrm{rot}\,\mathfrak{w}\,d\tau \times \mathfrak{w}^* \longrightarrow \Gamma \int\limits_{\Delta_w} d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*$$

und analog

$$\text{(71b)}\qquad \mathfrak{M}_h = \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*)\,.$$

Aus der Haltekraft für eine Quelle folgert man sofort, daß für einen Dipol $\mathfrak{d} = m\mathfrak{t}$

$$\text{(72a)}\qquad \mathfrak{R}_h = (\mathfrak{d}\cdot\Delta)\mathfrak{w}^* = m(\mathfrak{t}\cdot\Delta)\mathfrak{w}^*$$

$$\text{(72b)}\qquad \mathfrak{M}_h = \mathfrak{d} \times \mathfrak{w}^* = m\mathfrak{t} \times \mathfrak{w}^*$$

---

[16]) Vgl. Prandtl-Tietjens, a. a. O. [2]), S. 16.

ist, wo $\mathfrak{w}^*$ wieder die Geschwindigkeit ohne den Dipol $\mathfrak{d}$ an dessen Mittelpunkt bedeutet und das Moment auf diesen Mittelpunkt bezogen ist; man sieht: hier existiert keine Einzelkraft. — Befindet sich z. B. ein einziger geschlossener Wirbelfaden in einer Parallelströmung, so erhält man für die Haltekraft bzw. das Haltemoment

$$\mathfrak{K}_h = \Gamma \int d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U} = 0 \quad \text{wegen} \quad \int d\mathfrak{s} = 0 \tag{73a}$$

$$\mathfrak{M}_h = \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U}) \,. \tag{73b}$$

Multipliziert man den Integranden von $\mathfrak{M}_h$ aus, und verwandelt die entstehenden Ausdrücke (nach dem Stokesschen Satz) in Flächenintegrale, so hat man

$$\mathfrak{M}_h = \Gamma \mathfrak{F} \times \mathfrak{U} \,, \tag{74}$$

wo $\mathfrak{F}$ die im Sinne einer Rechtsschraube orientierte Fläche des Wirbelfadens ist. Noch rascher erhält man das letzte Resultat, wenn man den Wirbelfaden als einen Dipol $\int \Gamma d\mathfrak{o} = \Gamma \mathfrak{F}$ auffaßt, was erlaubt ist, und die frühere Formel (72b) anwendet. — Es sei bemerkt, daß die entsprechenden Formeln von Lagally die einfachen Resultate (73) nicht ergeben, da bei Lagally $\mathfrak{w}^*$ nicht die Geschwindigkeit ohne den Wirbelfaden bedeutet; daß man die Eigengeschwindigkeit eines Wirbelfadens unterdrücken darf, hat Lagally nicht bemerkt [17]).

Aus der Haltekraft für eine Quelle ergibt sich speziell das Coulombsche Gesetz: Eine in Q_1 befindliche Quelle e_1 zieht eine in Q_2 befindliche Quelle e_2 mit der Kraft $\frac{e_1 e_2}{4\pi r^2}\mathfrak{e}$ an, wo $\mathfrak{e}$ der Einheitsvektor von Q_2 nach Q_1 ist ($\mathfrak{e} = \vec{Q_2 Q_1}/r$).

Aus den Formeln (73a, b) für einen Wirbelfaden folgt noch: Ein einzelner (z. B. kreisförmiger) Wirbelfaden kann in sonst ruhender Flüssigkeit sich nicht, ohne seine Gestalt zu verändern, mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegen. Sonst hätte man nämlich von dem Wirbelfaden aus gesehen eine streng parallele und stationäre Anströmung $\{\mathfrak{U}\}$, für die nach (73a) wohl keine Kraft, jedoch nach (73b) bzw. (74) das Moment $\Gamma \mathfrak{F} \times \mathfrak{U}$ nötig wäre.

Mit Hilfe der Formel (74) läßt sich das zweite Glied in dem letzten Integral rechts für $-\mathfrak{M}_F$ in (69) derart umformen, daß $\mathfrak{U}$ aus dem Integral herausgezogen werden kann. Gemäß (74) beträgt nämlich der Beitrag einer dünnen Wirbelröhre der Stärke $d\Gamma$

$$d\Gamma \mathfrak{F} \times \mathfrak{U} \,,$$

also wegen $\mathfrak{F} = \frac{1}{2}(\mathfrak{r} \times d\mathfrak{s})$ (Fig. 22) und $d\Gamma\, d\mathfrak{s} = \operatorname{rot} \mathfrak{w} d\tau$

$$\tfrac{1}{2} \int (\mathfrak{r} \times \operatorname{rot} \mathfrak{w}\, d\tau) \times \mathfrak{U} \,,$$

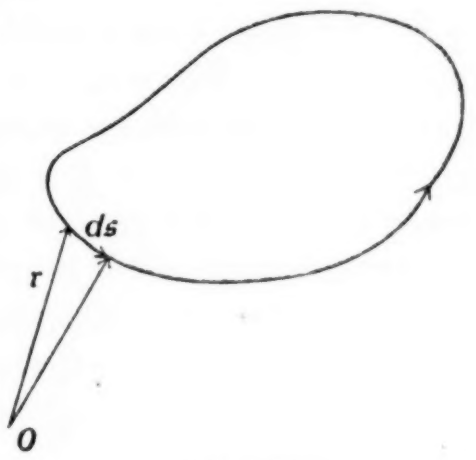


Fig. 22.

d. h. es gilt für eine und daher auch für beliebig viele Wirbelröhren

$$\int \mathfrak{r} \times (\operatorname{rot} \mathfrak{w} \times \mathfrak{U}) = \tfrac{1}{2} \int (\mathfrak{r} \times \operatorname{rot} \mathfrak{w}) \times \mathfrak{U} \,. \tag{75}$$

Ersetzt man in den erhaltenen Ausdrücken für die Haltekraft bzw. das Haltemoment einer diskreten Singularität $\mathfrak{w}^*$ durch $\mathfrak{U}$, so hat man die entsprechenden Ausdrücke für die Haltekraft bzw. das Haltemoment diskreter Singularitäten in einer Parallelströmung $\{\mathfrak{U}\}$; der Beitrag einer Quelle bzw. eines Wirbelfadens beträgt danach

$$e\mathfrak{U} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{r} \times e\mathfrak{U} = e\mathfrak{r} \times \mathfrak{U}$$

$$\Gamma \int d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U}) = \Gamma \mathfrak{F} \times \mathfrak{U} \,.$$

Damit erhalten wir für den Fall, daß nur punktförmige Quellen und linienförmige Wirbel vorkommen, wobei wir die Fläche selbst ebenfalls als Grenzfall solcher diskreter Singu-

[17]) Vgl. Lagally a. a. O. [1]), S. 421 u. S. 219—220.

laritäten auffassen, die (68) und (69) entsprechenden Formeln

$$(76)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_F = \sum\limits_I \{e\mathfrak{w}^* + \Gamma \int (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*)\} \\ \mathfrak{M}_F = \sum\limits_I \{\mathfrak{r} \times e\mathfrak{w}^* + \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*)\} \end{cases}$$

$$(77)\qquad \begin{aligned} -\mathfrak{K}_F &= \sum_A \{e\mathfrak{w}^* + \Gamma \int (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*)\} \qquad - \sum_R \{e\mathfrak{U} + \Gamma \int (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U})\} \\ -\mathfrak{M}_F &= \sum_A \{\mathfrak{r} \times e\mathfrak{w}^* + \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*)\} - \sum_R \{\mathfrak{r} \times e\mathfrak{U} + \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U})\}; \end{aligned}$$

kommen auch noch Dipole vor, so liefern diese gemäß (72) z. B. zu $-\mathfrak{K}_F$ bzw. $-\mathfrak{M}_F$ die Beiträge

$$(78a)\qquad \sum_A (\mathfrak{d} \cdot \nabla)\mathfrak{w}^* \qquad\qquad - \sum_R (\mathfrak{d} \cdot \nabla)\mathfrak{U}$$

bzw.

$$(78b)\qquad \sum_A \{\mathfrak{r} \times (\mathfrak{d} \cdot \nabla)\mathfrak{w}^* + (\mathfrak{d} \times \mathfrak{w}^*)\} - \sum_R \{\mathfrak{r} \times (\mathfrak{d} \cdot \nabla)\,\mathfrak{U} + (\mathfrak{d} \times \mathfrak{U})\},$$

wobei $(\mathfrak{d} \cdot \nabla)\mathfrak{U} = 0$ ist.

23. Ersetzen wir den diskreten Wirbelfaden in bekannter Weise durch eine Dipolfläche F, so gelangen wir zu Ausdrücken für $\mathfrak{K}_h$ und $\mathfrak{M}_h$, die mit den früher angegebenen (71) ihrem Werte nach übereinstimmen müssen. Wir denken uns auf der eingespannten Dipolfläche eine feste Einteilung in Flächenelemente $d\sigma$ gegeben, und berechnen die Haltekraft bzw. das Haltemoment pro Element $d\mathfrak{o} = d\sigma\,\mathfrak{n}$. Da die Dipole auf sich selbst keine Kraft und auch kein Moment ausüben, so dürfen wir deren Eigengeschwindigkeit vernachlässigen. Ist also $\mathfrak{w}^*$ die Geschwindigkeit ohne die Dipole, d. h. ohne den Wirbelfaden, so erfordern diese pro Element $d\mathfrak{o}$ bzw. die Haltekraft

$$\Gamma(d\mathfrak{o} \cdot \nabla)\,\mathfrak{w}^*$$

und das Haltemoment (hier bezogen auf den Koordinatenursprung O)

$$\mathfrak{r} \times \Gamma(d\mathfrak{o} \cdot \nabla)\,\mathfrak{w}^* + \Gamma d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}^*.$$

I. a. ist dies jedoch noch nicht der volle Beitrag von $d\mathfrak{o}$. Fassen wir nämlich in gewohnter Weise die Dipolbelegung als Grenzfall einer doppelten Quellbelegung auf zwei zu F parallelen und im kleinen Abstand a verlaufenden Flächen auf, so werden sich für die innerhalb des Volumelementes $d\tau = a\,d\sigma$ befindlichen (räumlich verteilten) Quell- und Wirbelmassen $\operatorname{div}\mathfrak{w} = \operatorname{div}\mathfrak{w}^*$, $\operatorname{rot}\mathfrak{w} = \operatorname{rot}\mathfrak{w}^*$, obgleich a und damit $d\tau \to 0$ geht, infolge der dort im Grenzfall $a \to 0$ herrschenden unendlich großen Geschwindigkeit i. a. endliche Haltekräfte ergeben. Beachten wir, daß für einen innerhalb $d\tau$ befindlichen Beobachter beim Grenzübergang $a \to 0$ die beiden begrenzenden Flächenelemente $d\sigma$ als zwei parallele unendlich lange Ebenen erscheinen, so können wir für die dort herrschende Geschwindigkeit ansetzen:

$$\mathfrak{w} = -\frac{\Gamma\mathfrak{n}}{a} + \mathfrak{w}',$$

wo $\mathfrak{w}'$ von den übrigen Singularitäten herrührt und stets endlich ist. Hieraus ergibt sich für die zugehörige Haltekraft

$$\mathfrak{K}_h = (\mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{w}^* + \operatorname{rot}\mathfrak{w}^* \times \mathfrak{w})\,d\tau$$

mit $d\tau = a\,d\sigma$ für $a \to 0$ der zusätzliche Beitrag

$$-\Gamma\,(\operatorname{div}\mathfrak{w}^*\,d\mathfrak{o} + \operatorname{rot}\mathfrak{w}^* \times d\mathfrak{o}).$$

Integriert man über die Fläche F, so erhält man also als Haltekraft bzw. Haltemoment der Dipolbelegung

$$(79)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_h = \Gamma \int (d\mathfrak{o} \cdot \nabla)\mathfrak{w}^* \qquad\qquad - \Gamma \int \{\operatorname{div}\mathfrak{w}^* d\mathfrak{o} + \operatorname{rot}\mathfrak{w}^* \times d\mathfrak{o}\} \\ \mathfrak{M}_h = \Gamma \int \{\mathfrak{r} \times (d\mathfrak{o} \cdot \nabla)\mathfrak{w}^* + (d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}^*)\} - \Gamma \int \mathfrak{r} \times \{\operatorname{div}\mathfrak{w}^* d\mathfrak{o} + \operatorname{rot}\mathfrak{w}^* \times d\mathfrak{o}\}, \end{cases}$$

und diese Ausdrücke müssen bzw. den beiden folgenden gleich sein:

$$(80)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_h = \Gamma \int (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*) \\ \mathfrak{M}_h = \Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}^*) . \end{cases}$$

Durch Wegheben von Γ ergeben sich hieraus zwei Integralumwandlungen, die sich natürlich auch direkt mit Hilfe des Stokesschen Satzes beweisen lassen. Umgekehrt führt die Kenntnis dieser Integralumwandlungen von (79) sofort zu (80).

24. *Die Größen $\mathfrak{K}_\infty$, $\mathfrak{M}_\infty$ auf eine zweite Art bestimmt und gedeutet.* Hierzu gelangen wir auf Grund der Bemerkung, daß $\mathfrak{v} = \mathfrak{w} - \mathfrak{U}$ in $\mathfrak{K}_\infty$ und $\mathfrak{M}_\infty$ linear eingeht (vgl. **20**). D. h. aber: Ist $\{\tilde{\mathfrak{w}}\}$ eine andere Strömung mit den entsprechenden Größen $\tilde{\mathfrak{K}}_\infty$, $\tilde{\mathfrak{M}}_\infty$ und gilt im Unendlichen

$$\tilde{\mathfrak{w}} - \mathfrak{w} \sim \frac{1}{r^4} ,$$

bzw. für die dort existierenden Potentiale

$$\tilde{\varphi} - \varphi \sim \frac{1}{r^3} ,$$

so ist

$$\tilde{\mathfrak{K}}_\infty = \mathfrak{K}_\infty , \qquad \tilde{\mathfrak{M}}_\infty = \mathfrak{M}_\infty .$$

Wir fassen nun das gesamte Singularitätensystem Δ als Grenzfall endlich vieler diskreter Quellen und Wirbel auf, und ersetzen gleichzeitig jeden Wirbelfaden durch eine Dipolfläche. Dann dürfen wir nach dem soeben erhaltenen Resultat und gemäß Nr. **4** die gesamten Quellen durch eine Quelle, die sog. Schwerpunktsquelle von der Ergiebigkeit Σe in $\Sigma e\mathfrak{r}/\Sigma e$, und die durch Dipolflächen ersetzten Wirbelfäden durch einen Dipol $\Sigma\Gamma\mathfrak{F}$ ersetzen. Es ist also nach (70) und (71)

$$\mathfrak{K}_\infty = \Sigma e \cdot \mathfrak{U} = \sum_R e\mathfrak{U} ,$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \frac{\Sigma e\mathfrak{r}}{\Sigma e} \times \Sigma e \cdot \mathfrak{U} + \Sigma\Gamma\mathfrak{F} \times \mathfrak{U} = \sum_R R\{\mathfrak{r} \times e\mathfrak{U}) + (\Gamma\mathfrak{F} \times \mathfrak{U})\} .$$

Ersetzt man hierin $\Gamma\mathfrak{F} \times \mathfrak{U}$ vermöge (73b) durch $\Gamma \int \mathfrak{r} \times (d\mathfrak{s} \times \mathfrak{U})$, so gelangt man durch Verschmierung sofort wieder zu den früher erhaltenen Formeln.

§ 7. Weitere Formeln.

25. Im folgenden bringen wir weitere Ausdrücke für $\mathfrak{K}_F$ und $\mathfrak{M}_F$, die gegenüber den bisherigen den Vorzug haben, daß in ihnen keine Integrale über den Innenraum I auftreten und vernachlässigbare Eigengeschwindigkeiten gestrichen sind. Wir setzen $\mathfrak{w} = \mathfrak{U} + \mathfrak{v}$, wo also $\mathfrak{v}$ von dem gesamten Singularitätensystem $\Delta = \Delta_i + \Delta_a$ herrührt. Indem wir in Δ_i und Δ_a die Wirbelfäden P' und P abspalten, für sich zusammenfassen und die entsprechende Zerlegung für die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ vornehmen, erhalten wir

$$(81)\qquad \begin{cases} \Delta = \Delta_0 + (\mathsf{P}' + \mathsf{P}) + \tilde{\Delta}_a \\ \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \quad \mathfrak{q} \quad + \tilde{\mathfrak{v}}_a , \end{cases}$$

und im Spezialfall, daß Δ_a abgeschlossen ist,

$$(81')\qquad \begin{cases} \Delta = \Delta_0 + \Delta_a \\ \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}_a . \end{cases}$$

Indem wir weiter von den inneren Formeln für $\mathfrak{K}_F$ und $\mathfrak{M}_F$ ausgehen:

$$(82)\qquad \mathfrak{K}_F \text{ bzw. } \mathfrak{M}_F = \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{w} \\ \Delta_i \end{matrix} \right\},$$

gelangen wir durch Aufspaltung des Singularitätengebietes Δ sowie der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ und Unterdrückung der Eigengeschwindigkeit jedes abegschlossenen Teilsystems

gemäß (57) zu übersichtlichen Formeln, die besonders handlich werden, wenn wir Δ_i über die Fläche F ausbreiten. Durch Übergang von Δ_i zu dem komplementären Δ_a vermöge (57a) erhält man zu jeder inneren Formel eine entsprechende äußere. — Abspaltung der Geschwindigkeit $\mathfrak{U}$ ergibt

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\}; \tag{83}$$

hieraus folgt durch Übergang zu Δ_a vermöge (57a)

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Delta_a\end{matrix}\right\}. \tag{84}$$

Ersetzt man in (84) $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{w} - \mathfrak{U}$, so kommt man auf die früheren Lagallyschen Formeln für das Äußere zurück. Die Zerfällung $\Delta_i = \Delta_0 + \mathsf{P}'$ bzw. $\Delta_a = \tilde{\Delta}_a + \mathsf{P}$ in den von $\mathfrak{U}$ freien Gliedern in (83) und (84) liefert, wenn man die Eigengeschwindigkeit von Δ_0 und $\tilde{\Delta}_a$ gleich vernachlässigt,

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Delta_0\end{matrix}\right\}' + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \mathsf{P}'\end{matrix}\right\} \tag{85}$$

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \tilde{\Delta}_a\end{matrix}\right\}' - \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \mathsf{P}\end{matrix}\right\}. \tag{86}$$

26. *Umformung von* $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\}$. Für $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\}$ d. h. die Haltekraft bzw. das Haltemoment in der Strömung $\{\mathfrak{U}\}$ können wir z. B. die folgenden Ausdrücke angeben: Wir denken uns Δ_i auf F ausgebreitet und aus Quellen und Wirbeln bestehend. Erinnern wir uns, daß diese Quellen und Wirbel gemäß (31) bzw. mit den Dichten $d\mathfrak{o} \cdot [\mathfrak{w}]^+_-$ und $d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{w}]^+_-$ verteilt sind, so haben wir für die Kraft

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \int_F \mathfrak{U}(d\mathfrak{o} \cdot [\mathfrak{w}]^+_-) + (d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{w}]^+_-) \times \mathfrak{U} \tag{87}$$

und speziell für das zum Totwasser gehörige Wirbelsystem

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \int_F \{(d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}) \times \mathfrak{U}\}, \tag{88}$$

und analoge Ausdrücke für das Moment. — Verwenden wir die soeben erhaltene Formel, so gelangen wir von (85) und (86) zu den expliziten Ausdrücken für $\mathfrak{R}_F$

$$\mathfrak{R}_F = \int_F (d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}) \times \mathfrak{U} + \int_{\Delta_0} \{(\mathfrak{q} + \tilde{\mathfrak{v}}_a)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times (\mathfrak{q} + \tilde{\mathfrak{v}}_a)\} + \int_{\mathsf{P}'} (\mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{v}) \tag{89}$$

$$\mathfrak{R}_F = \int_F (d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}) \times \mathfrak{U} - \int_{\tilde{\Delta}_a} \{(\mathfrak{q} + \mathfrak{v}_0)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times (\mathfrak{q} + \mathfrak{v}_0)\} - \int_{\mathsf{P}} (\mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{v}) \tag{90}$$

und analogen für $\mathfrak{M}_F$, in denen der Einfluß der einzelnen Singularitäten in Evidenz gesetzt ist (man beachte, daß für P' und P gilt

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{w} = 0).$$

In dem Integral (88) können wir $\mathfrak{U}$ heraussetzen. Zu dem verbleibenden Teil liefern dann nach (60) nur die Wirbel P' einen Beitrag, deren Existenz eine Zirkulation um den Körper nach sich zieht, der also füglich als (räumlicher) Zirkulationsvektor $\mathfrak{z}$ bezeichnet werden kann; dann lautet der betreffende Beitrag zur Haltekraft

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \mathfrak{z} \times \mathfrak{U} \tag{91}$$

und stellt, wie man sieht, die Verallgemeinerung der Kuttaschen Kraft dar.

Wir zerfällen $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\}$ gemäß der Zerlegung

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \mathsf{P}'\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_0\end{matrix}\right\}. \tag{92}$$

Im Falle der Kraft ergibt dann der erste Summand rechts die obige Kuttasche Kraft (91), die wir, falls P' auf F gelegt wird, offenbar auch in die Form

$$\int (d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{q}]^+_-) \times \mathfrak{U} \tag{93}$$

setzen können; der zweite Summand ist $= 0$, wie man z. B. erkennt, wenn man Δ_0 aus lauter Dipolen oder lauter Wirbeln aufbaut. Im Falle des Momentes ergibt der zweite Summand, wenn man Δ_0 aus Quellen und Dipolen mit den Dichten $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right)$, $-(\varphi - \varphi')$ gemäß Nr. **17** aufbaut

$$\left[\int \mathfrak{r}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right\} d\sigma + \int -(\varphi - \varphi')\, d\mathfrak{o}\right] \times \mathfrak{U} \tag{94}$$

mit $\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \mathfrak{U}\mathfrak{n} = 0$, woraus hervorgeht, daß man die eckige Klammer nur bis auf Vielfache des Vektors $\mathfrak{U}$ zu berechnen braucht. Nun ist nach (50)

$$\int \mathfrak{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -\int \mathfrak{r}\mathfrak{U} \cdot d\mathfrak{o} = -\int_I (\mathfrak{U} \cdot \nabla)\, \mathfrak{r} d\tau = \int_I \mathfrak{U} d\tau = \mathfrak{U} \int_I d\tau$$

$$\int \mathfrak{r} \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d\sigma = \int \mathfrak{r}\, \mathrm{grad}\, \varphi' \cdot d\mathfrak{o} = \int \mathrm{grad}\, \varphi'\, d\tau = \int \varphi'\, d\mathfrak{o}\,,$$

mithin

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U} \\ \Delta_0\end{matrix}\right\} = \mathfrak{U} \times \int_F \varphi\, d\mathfrak{o}\,. \tag{95}$$

27. In ähnlicher Weise wie $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{U} \\ \Delta_i\end{matrix}\right\}$ könnten wir auch die beiden anderen Summanden in (85) in Integrale auf F verwandeln. Verwenden wir für Δ_i nur Quellen und Wirbel und legen sie auf F, so können wir auch alle drei Summanden zusammen in ein Flächenintegral verwandeln. Für die Kraft ergibt sich dann gemäß (31) und (32)

$$\mathfrak{K}_F = \int \frac{\mathfrak{w}^- + \mathfrak{w}^+}{2} d\mathfrak{o} \cdot [\mathfrak{w}]^+_- + (d\mathfrak{o} \times [\mathfrak{w}]^+_-) \times \frac{\mathfrak{w}^- + \mathfrak{w}^+}{2} \tag{96}$$

und speziell bei der Totwasserströmung

$$\mathfrak{K}_F = \int (d\mathfrak{o} \times \mathfrak{w}) \times \frac{\mathfrak{w}}{2}\,. \tag{97}$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für das Moment, aus denen rückwärts durch Aufspalten der Singularitäten und der Geschwindigkeit und Ausnutzung der Beziehungen (57), (58) Formeln vom Typ (93) erhalten werden können.

28. Was die rechnerische Bestätigung der erhaltenen Formeln anbetrifft, so sei kurz folgendes bemerkt. Die sich aus (84) und (88) ergebende Gestalt der Lagallyschen Formeln für das Äußere erhält man auch direkt dadurch, daß man in den Formeln (52) $\mathfrak{w}$ durch $\mathfrak{U} + \mathfrak{v}$ ersetzt, die Integrale in zwei Teile aufspaltet, einen in dem $\mathfrak{U}$ und einen anderen in dem nur $\mathfrak{v}$ als Geschwindigkeit auftritt, und den letzteren Teil direkt nach der unter Nr. **19** gebrachten Methode umwandelt (wobei die unendlich ferne Kugel K_∞ keinen Beitrag liefert!). — Die Äquivalenz von (87) und (88) ergibt sich so: Denkt man sich die Quellen und Wirbel auf einen schmalen Zwischenraum Z verschmiert, so daß $I = Z + S$ ist, und berechnet die Haltekräfte durch Integration über Z, so ergibt sich im Grenzfall (87); dieselbe Rechnung auf S angewandt liefert eine Identität: $0 =$ etwas, die zu (87) addiert, (88) ergibt; ähnliches gilt für die Äquivalenz von (96) und (97), wobei hier noch eine kleine Zwischenumformung nötig ist.

Es sei noch bemerkt, daß die gemachte Einschränkung, daß alle Wirbelfäden im Endlichen liegen, keineswegs notwendig ist. Besteht z. B. das Wirbelsystem aus den von

einem Prandtlschen Tragflügel abgehenden Wirbelfäden, für die, da sie „frei" sind, notwendig rot $\mathfrak{w} \times \mathfrak{w} = 0$, d. h. rot $\mathfrak{w} \parallel \mathfrak{w}$ ist, so gilt also

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \mathsf{P}\end{matrix}\right\} = 0\,.$$

Die Formeln für das Innere gelten in der gleichen Weise auch hier noch. Beim Übergang zum Außenraum tritt an Stelle der früheren Gleichung

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_i\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta_a\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta\end{matrix}\right\} (= \mathfrak{R}_\infty,\ \mathfrak{M}_\infty)$$

die neue

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \Delta\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{w}\\ \mathsf{P}'\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{q} + \mathfrak{U}\\ \Delta_0 + \widetilde{\Delta}_a\end{matrix}\right\}.$$

§ 8. Der Spezialfall: Körper in Parallelströmung; Kirchhoffs Satz.

29. Hier ist $\Delta_a = 0$, $\Delta_i = \Delta_0$, also nach früherem

$$\mathfrak{R}_F = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_0\end{matrix}\right\} = 0$$

$$\mathfrak{M}_F = \left\{\begin{matrix}\mathfrak{U}\\ \Delta_0\end{matrix}\right\} = \mathfrak{U} \times \int \varphi\, d\mathfrak{o}$$

mit $\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{n} = 0$. φ und damit auch $\int \varphi\, d\mathfrak{o}$ hängen von $\mathfrak{U}$ offensichtlich in linearer Weise ab. Ist also in bezug auf ein Dreibein

$$\mathfrak{U} = U_1 \mathfrak{e}_1 + U_2 \mathfrak{e}_2 + U_3 \mathfrak{e}_3$$

und entsprechend

$$\varphi = U_1 \varphi_1 + U_2 \varphi_2 + U_3 \varphi_3$$

wo φ_k zu $\mathfrak{e}_k$ in derselben Beziehung wie φ zu $\mathfrak{U}$ steht, so daß also

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -(\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{n}) = -\alpha_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\alpha_2, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = -\alpha_3$$

ist, so gilt

$$\int \varphi\, d\mathfrak{o} = U_1 \int \varphi_1 d\mathfrak{o} + U_2 \int \varphi_2 d\mathfrak{o} + U_3 \int \varphi_3 d\mathfrak{o}\,,$$

wo $d\mathfrak{o} = (d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\, d\sigma$, mit der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{matrix} \int \varphi_1 d\sigma_1 & \int \varphi_2 d\sigma_1 & \int \varphi_3 d\sigma_1 \\ \int \varphi_1 d\sigma_2 & \int \varphi_2 d\sigma_2 & \int \varphi_3 d\sigma_2 \\ \int \varphi_1 d\sigma_3 & \int \varphi_2 d\sigma_3 & \int \varphi_3 d\sigma_3\,. \end{matrix}$$

Wir zeigen, daß diese Matrix symmetrisch ist. Um nachzuweisen, daß z. B.

$$\int \varphi_1 d\sigma_2 = \int \varphi_2 d\sigma_1$$

ist, setzen wir in $d\sigma_2 = \alpha_2 d\sigma$ und $d\sigma_1 = \alpha_1 d\sigma$ für die Größen α_2 und α_1 ihre Werte $-\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ und $-\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ und erhalten nach Unterdrückung des Minuszeichens

$$\int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\, d\tau = \int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\, d\sigma\,,$$

eine Beziehung, die nach (41) zu Recht besteht. Aus dem Obigen folgt also in bekannter Weise: Wird ein Körper in eine Parallelströmung getaucht, so erfährt er keine Kraft, wohl aber i. a. ein Moment; letzteres verschwindet jedoch für mindestens drei ausgezeich-

nete aufeinander senkrecht stehende Richtungen von $\mathfrak{U}$ (Satz von Kirchhoff [18])). — Ist der Körper ein Ellipsoid, so fallen diese Richtungen in die der drei Achsen, wobei übrigens die Richtung der kleinsten Achse die stabile ist. Der Kirchhoffsche Satz gilt auch für durchlochte Körper, sofern nur die Außenströmung singularitätenfrei ist; findet jedoch eine zyklische Umströmung des Körpers statt, so kommt dies einer Dipolbelegung eines passenden Querschnittes gleich, so daß dann die Voraussetzungen des Satzes nicht mehr zutreffen.

Der *Spezialfall der quer angeströmten Platte* sei noch näher betrachtet. Fig. 23 zeigt das Wirbelsystem und die Haltekräfte für die beiden Plattenhälften, deren Größe eine einfache Rechnung $\left(\text{die Wirbeldichte ist hier } = \frac{-2x}{\sqrt{b^2 - x^2}}\right)$ zu $2bU^2$ liefert. Bewegt man nun eine zur Hälfte in Wasser eingetauchte Platte mit konstanter Geschwindigkeit U durch die Flüssigkeit, so ergibt sich als Strömung die untere Hälfte der in Fig. 23 gezeichneten Plattenströmung; Fig. 24. Man sieht, daß auf die Platte eine Haltekraft von der Größe

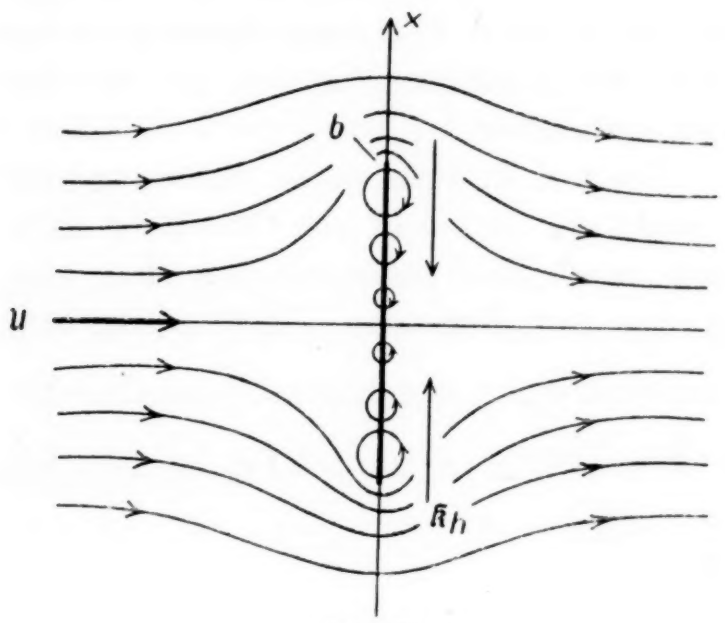


Fig. 23.

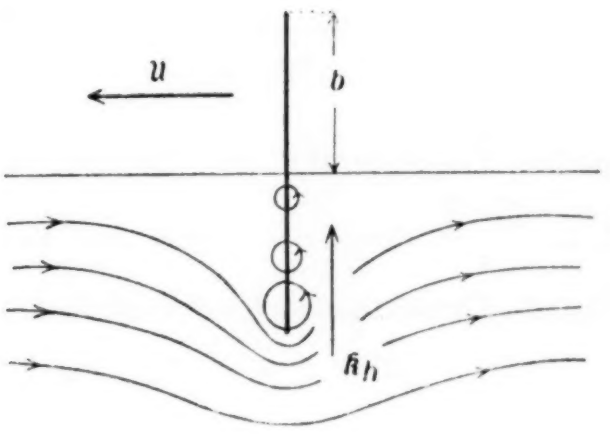


Fig. 24.

$2bU^2$ nach oben ausgeübt werden muß, die Platte also mit der entgegengesetzten Kraft nach innen gesaugt wird (Saugwirkung einer Schneide). Wird die Platte während der Vorwärtsbewegung plötzlich herausgenommen, so wird sich das in Fig. 24 gezeichnete Wirbelsystem momentan einstellen, jedoch im nächsten Augenblick infolge Fehlens der Haltekraft rasch zerfallen.

---

[18]) Vgl. Kirchhoff, Mechanik, Leipzig 1876, 19. Vorlesung, S. 236, und Lamb, a. a. O. [4]), S. 179. Bei Lamb findet man auch einen Nachweis für die folgende Tatsache: Ist in dem Achsensystem der drei ausgezeichneten Richtungen die obige Matrix

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

so ist von den drei Anstell- (d. h. hier Achsen-)Richtungen nur eine „stabil", und zwar jene, die dem größten der drei Werte A, B, C entspricht $\left(A, B, C \text{ sind nie negativ; so ist z. B. } A = \int \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 2 \int \text{grad}^2 \varphi_1, \ldots\right)$. Denkt man sich also das Ellipsoid

$$(+) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.}$$

gezeichnet, das im Körper festliegt, so fällt die stabile Richtung mit der der kleinsten Ellipsoidachse zusammen. — Ist der Körper speziell ein Ellipsoid, so ist wie man sofort sieht, das Ellipsoid (+) bei passender Wahl der Konstanten mit dem Körper identisch. Die stabile Anstellrichtung ist dann also die der kleinsten Körperachse. Dieses Resultat steht in Übereinstimmung mit der bekannten Erscheinung, daß ein länglicher Körper, wie z. B. eine Platte, stets bestrebt ist, sich mit seiner Breitseite gegen die Strömung zu stellen.

Zusatz betr. den Druck im Innern des Körpers. Denken wir uns den Körper nach der Methode des Totwassers durch Wirbel ersetzt, so herrscht im Innern sicher ein konstanter Druck. Wir können diesen jedoch nicht beliebig vorschreiben: Sein Wert ist vielmehr durch die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen bestimmt, sobald man die sonst noch angreifenden Fremdkräfte kennt. In unserem Falle folgt sein Wert leicht so: Da z. B. im vorderen Staupunkt die Flüssigkeit ruht, dort also die Haltekraft $\mathfrak{K}_h = \text{rot } \mathfrak{w} \times \mathfrak{w}$ verschwindet, so ist an dieser Stelle, wenn wir noch voraussetzen, daß dort keine weitere Fremdkraft wirkt, die treibende Druckkraft ebenfalls $= 0$, d. h der Innendruck muß gleich dem Staudruck $p_{st} = p_0 + \frac{U^2}{2}$ (p_0 der Druck im Unendlichen, U die Anströmungsgeschwindigkeit) sein. Dies bedeutet, daß dann auch im Innern die Bernoullische Gleichung gilt, und ebenso in einem Bereiche, der, wie in Fig. 25, über die Begrenzung hinüberreicht; d. h. aber dann: hier ist die Haltekraft $\mathfrak{K}_h$ des Wirbels tatsächlich $= \text{rot } \mathfrak{w} \times \mathfrak{w}$, eine Zusatzkraft im Sinne der Ausführungen von Nr. **19** also nicht vorhanden.

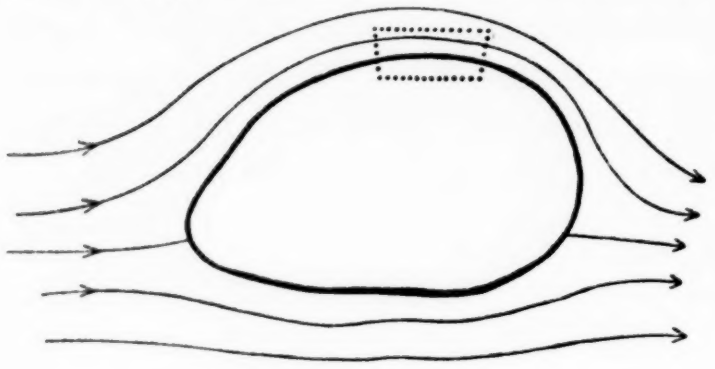


Fig. 25.

Liegt z. B. eine ebene Strömung vor, so wirkt $\mathfrak{K}_h$ senkrecht zur Oberfläche nach innen, muß also zusammen mit dem normalen Druckgefälle die Radialbeschleunigung des dort liegenden Teilchens ergeben, d. h. $\frac{(\frac{1}{2}c)^2}{r}$, wo c die Größe der Außengeschwindigkeit und r den Krümmungsradius bedeutet. Denkt man sich die Wirbelschicht von der kleinen Dicke a so ist nach Fig. 26 in der Tat

$$v_x - u_y = -\frac{c}{a} - \frac{(\frac{1}{2}c)}{r},$$

also die Haltekraft

$$= -\left\{\frac{c}{a} \cdot \frac{\frac{1}{2}c}{2} + \frac{(\frac{1}{2}c)^2}{r}\right\} \mathfrak{n};$$

die Druckkraft ist aber

$$\frac{\frac{1}{2}c^2}{r}\,\mathfrak{n},$$

mithin die Gesamtkraft

$$-\frac{(\frac{1}{2}c)^2}{2}\,\mathfrak{n},$$

d. h. gerade gleich der Radialbeschleunigung [19]).

Fig. 26.

[19]) Eine Anwendung dieses Gedankenganges auf die bekannte Kirchhoffsche Plattenströmung mit Totwasser bringt eine demnächst erscheinende kleine Note des Verf. unter dem Titel: Zur Theorie der Kirchhoffschen Plattenströmung.

Nennen wir die evtl. zu der Haltekraft $\mathfrak{K}_h$ hinzutretende Zusatzkraft $\mathfrak{K}'_h$, so können wir auch direkt mit der Bewegungsgleichung arbeiten, die dann so lautet:

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + \mathrm{grad}\,\frac{\mathfrak{w}^2}{2} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w} = -\,\mathrm{grad}\,p + \mathfrak{K}_h + \mathfrak{K}'_h\,.$$

(Man beachte, daß hier in der Mitte nicht einfach Masse · Beschleunigung steht, sondern infolge des Gliedes $\mathfrak{w}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}$ gemäß Newtons Grundgesetz die Änderung der Bewegungsgröße, in welcher also die Änderung der Masse mit einbegriffen ist. Im Falle der Prandtlschen Tragflügeltheorie ist z. B. die Bernoullische Gleichung als überall erfüllt angenommen, ferner $\mathrm{div}\,\mathfrak{w} = 0$, also die wirkende Fremdkraft in Übereinstimmung mit unserem früheren Ergebnis $= \mathrm{rot}\,\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{K}'_h = 0$.

§ 9. Über den rechnerischen Nachweis, daß eine Wirbelröhre bzw. ein Wirbelfaden auf sich selbst weder eine Kraft noch ein Moment ausübt.

30. Arbeitet man gleich mit dem Wirbelfaden, und denkt sich diesen durch Dipole ersetzt, so läuft, da ein Dipol auf sich selbst keine Kraft ausübt, der Nachweis darauf hinaus, zu zeigen, daß zwei (getrennte) Dipole $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ an den Stellen Q_1 und Q_2 weder eine Kraft noch ein Moment aufeinander ausüben. Indem wir fordern, daß die Zeiger i und k stets verschieden voneinander und nur der beiden Werte 1, 2 fähig sein sollen, führen wir die Bezeichnungen ein: Q_1 sei der Koordinatenursprung O,

$$\mathfrak{r}_i = \overrightarrow{OQ_i},\ \mathfrak{r}_{ik} = \overrightarrow{Q_iQ_k},$$

$\mathfrak{w}_{ik}$ die vom i-ten Dipol an der Stelle des k-ten Dipols induzierte Geschwindigkeit, $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{M}_i$ die Haltekraft bzw. das Haltemoment des i-ten Dipols. Dann ist nach (6b)

$$\mathfrak{w}_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\underset{k}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_i \cdot \underset{i}{\nabla})\frac{1}{r_{ik}}\right]$$

und nach (72)

$$\mathfrak{K}_i = (\mathfrak{d}_i \cdot \underset{i}{\nabla})\,\mathfrak{w}_{ki}\,,$$

$$\mathfrak{M}_i = \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{K}_i + \mathfrak{d}_i \times \mathfrak{w}_{ki}\,.$$

Zu zeigen ist:

$$\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 = 0\,, \qquad \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = 0\,.$$

Diese Behauptung ist gleichbedeutend mit den beiden folgenden leicht verifizierbaren Relationen

$$(98)\quad \begin{cases} (\mathfrak{d}_1 \cdot \underset{1}{\nabla})\underset{1}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_2 \cdot \underset{2}{\nabla})\frac{1}{r_{21}}\right] + (\mathfrak{d}_2 \cdot \underset{2}{\nabla})\underset{2}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_1 \cdot \underset{1}{\nabla})\frac{1}{r_{12}}\right] = 0 \\ \mathfrak{d}_1 \times \underset{1}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_2 \cdot \underset{2}{\nabla})\frac{1}{r_{21}}\right] + \mathfrak{d}_2 \times \underset{2}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_1 \cdot \underset{1}{\nabla})\frac{1}{r_{12}}\right] = \mathfrak{r}_{21} \times (\mathfrak{d}_2 \cdot \underset{2}{\nabla})\underset{1}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_1 \cdot \underset{1}{\nabla})\frac{1}{r_{12}}\right]. \end{cases}$$

Da die linke Seite der letzten Gleichung symmetrisch in den Zeigern 1 und 2 ist, so muß sie auch

$$(98a)\qquad = \mathfrak{r}_{12} \times (\mathfrak{d}_1 \cdot \underset{1}{\nabla})\underset{2}{\nabla}\left[(\mathfrak{d}_2 \cdot \underset{2}{\nabla})\frac{1}{r_{21}}\right]$$

sein, eine Beziehung, die aus der vorigen Gleichung einfach durch Verlegung des Koordinatenursprungs von Q_1 nach Q_2 entsteht.

31. Wir können aber auch mit der endlichen Wirbelröhre arbeiten. Sei $\mathfrak{c} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{w}$ und, da $\mathfrak{c}$ innerhalb der Röhre stetig und endlich ist, $|\mathfrak{c}| \leqq C$, wo C fest ist. Bedenkt man, daß das von einer beliebigen Wirbelröhre induzierte Geschwindigkeitsfeld um so „langsamer" wird, je weniger Wirbelmasse vorhanden ist, und in die Ruhe übergeht, wenn die Wirbelmasse verschwindet, so leuchtet ein, daß man die gegebene Röhre vom Volumen V und der Stärke Γ in soviel (es seien n) Teilröhren vom Volumen V_i und der Stärke Γ_i aufteilen kann, daß die von einer beliebigen (es sei die i-te) Teilröhre hervor-

gerufene Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_i$ ihrem Betrage nach kleiner als eine vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$ wird. Für die Haltekraft bzw. das Haltemoment

$$\mathfrak{K}_i = \int\limits_{i\text{-te Röhre}} (\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i), \qquad \mathfrak{M}_i = \int\limits_{i\text{-te Röhre}} \mathfrak{r} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i),$$

die eine solche Teilröhre in ihrer Eigenströmung $\{\mathfrak{w}_i\}$ erfordert, gilt dann eine Abschätzung

$$|\mathfrak{K}_i| \leqq \varkappa \varepsilon V_i, \qquad |\mathfrak{M}_i| \leqq \mu \varepsilon V_i \tag{99}$$

($\varkappa$, μ Konstante, die unabhängig von der betr. Teilröhre sind), aus der durch Addition über alle Teilröhren sich ergibt:

$$\Sigma |\mathfrak{K}_i| \leqq \varkappa \varepsilon V, \qquad \Sigma |\mathfrak{M}_i| \leqq \mu \varepsilon V\,. \tag{100}$$

Um z. B. eine der ersten Ungleichung von (99) genügende Konstante $\varkappa$ zu finden, bilden wir von $\mathfrak{K}_i$ das Quadrat

$$|\mathfrak{K}_i|^2 = \mathfrak{K}_i \cdot \mathfrak{K}_i = \int d\tau (\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i) \cdot \int d\tau (\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i)\,,$$

für das wir, wenn die dem Element $d\tau'$ entsprechenden Größen ebenfalls durch einen Strich gekennzeichnet werden, offenbar auch schreiben können:

$$|\mathfrak{K}_i|^2 = \iint d\tau\, d\tau' (\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i) \cdot (\mathfrak{c}' \times \mathfrak{w}_i')\,.$$

Hier ist aber der Integrand [20]).

$$(\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}_i) \cdot (\mathfrak{c}' \times \mathfrak{w}_i') = \begin{vmatrix} \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}' & \mathfrak{w}_i \cdot \mathfrak{c}' \\ \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{w}_i' & \mathfrak{w}_i \cdot \mathfrak{w}_i' \end{vmatrix}$$

und daher seinem Betrage nach $\leqq 2\varepsilon^2 C^2$, mithin

$$|\mathfrak{K}_i|^2 \leqq 2\varepsilon^2 C^2 \iint d\tau\, d\tau' = 2\varepsilon^2 C^2 V_i^2\,,$$

d. h.

$$|\mathfrak{K}_i| \leqq \varkappa \varepsilon V_i$$

mit $\varkappa = \sqrt{2}\, C$.

Aus (100) geht hervor, daß wir bei der Bestimmung von $\mathfrak{K}_h$ und $\mathfrak{M}_h$ für die Wirbelröhre im Grenzfall einer beliebig feinen Aufteilung in Teilröhren, so daß also $\varepsilon \to 0$ ist, von der Beeinflussung der Teilröhren auf sich selbst absehen dürfen. Es braucht daher nur noch gezeigt zu werden, daß die gegenseitige Beeinflussung aller Teilröhren aufeinander insgesamt $= 0$ ist, eine Behauptung, die offenbar erwiesen ist, wenn sie für irgend zwei Teilröhren zu Recht besteht. Da nun von einer Teilröhre nur das Geschwindigkeitsfeld außerhalb ihrer benutzt wird, so kann man sich die Röhre jeweils auf einen Wirbelfaden zusammengeschrumpft denken. Dann lautet die zu beweisende Behauptung: Irgend zwei getrennte Wirbelfäden üben insgesamt keinen Einfluß aufeinander aus, eine Behauptung, deren Richtigkeit offensichtlich von der Stärke der Fäden unabhängig ist, so daß diese in dem nun folgenden Nachweis als beliebig angenommen werden darf. In der Dipolauffassung ist die letzte Behauptung evident, da zwei Dipole insgesamt aufeinander nicht einwirken. Wir wollen aber ohne diese Auffassung durchkommen, und führen den Beweis zunächst für die Kräfte, sodann für die Momente. Dazu bezeichnen wir die einzelnen Fäden durch $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, ihre Linienelemente durch $d\mathfrak{s}$, $d\mathfrak{s}'$, ihre Stärken durch Γ, Γ' und ihre induzierten Eigengeschwindigkeiten durch $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$; generell sei die einzelne Stelle von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ durch s und s' charakterisiert; $\mathfrak{r}_{ss'}$ bedeutet z. B. den von der Stelle s nach der Stelle s' gezogenen Vektor; $\mathfrak{r}_s$ sei wie üblich der vom Ursprung O zu der Stelle s gezogene Ortsvektor. Die Haltekräfte bzw. Haltemomente von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ in den Strömungen $\{\mathfrak{w}'\}$ bzw. $\{\mathfrak{w}\}$ seien bzw. $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{M}'$; (Fig. 27).

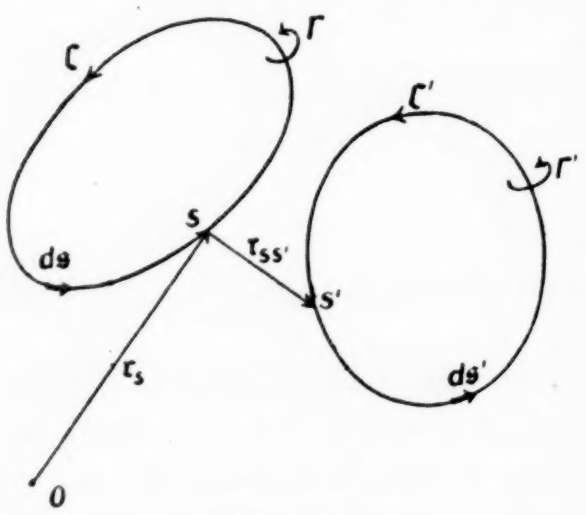


Fig. 27.

[20]) Siehe Lagally a. a. O. [5]), S. 33, Gl. (52).

a) Kräfte. Nach (71a) ist die Wirkung von $\mathfrak{C}'$ auf $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{K} = \Gamma \int d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}' ,$$

wo nach (27)

$$\mathfrak{w}' = \frac{\Gamma'}{4\pi} \int d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} ,$$

d. h.

$$(101) \qquad \mathfrak{K} = \frac{\Gamma\Gamma'}{4\pi} \int d\mathfrak{s} \times \int d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} = \frac{\Gamma\Gamma'}{4\pi} \iint d\mathfrak{s} \times \left(d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} \right) .$$

Entwickelt man den Integranden

$$(102) \qquad d\mathfrak{s} \times \left(d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} \right) = \frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} d\mathfrak{s}' - (d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{s}') \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} ,$$

so verschwindet der Beitrag des ersten Summanden

$$\iint \frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} d\mathfrak{s}' = \int d\mathfrak{s}' \int \frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} ,$$

da das innere Integral nach dem Stokesschen Satze verschwindet:

$$(103) \qquad \int \frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} = 0$$

(jedes kugelsymmetrische Geschwindigkeitsfeld ist rotationsfrei). Bleibt also der zweite Summand, der zusammen mit dem entsprechenden Summanden von $\mathfrak{K}'$ offensichtich 0 ergibt.

b) Momente. Nach (71b) ist die Wirkung von $\mathfrak{C}'$ auf $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{M} = \Gamma \int \mathfrak{r}_s \times [d\mathfrak{s} \times \mathfrak{w}'],$$

d. h. nach (27)

$$(104) \quad \mathfrak{M} = \frac{\Gamma\Gamma'}{4\pi} \int \mathfrak{r}_s \times \left[d\mathfrak{s} \times \int d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} \right] = \frac{\Gamma\Gamma'}{4\pi} \iint \mathfrak{r}_s \times \left[d\mathfrak{s} \times \left(d\mathfrak{s}' \times \frac{\mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} \right) \right] .$$

Entwickelt man hier die eckige Klammer wie oben, so erhält man für den Integranden

$$\frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} (\mathfrak{r}_s \times d\mathfrak{s}') - (d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{s}') \frac{\mathfrak{r}_s \times \mathfrak{r}_{s's}}{r_{s's}^3} ,$$

und der zweite Summand mit dem entsprechenden von $\mathfrak{M}'$ zusammenfaßt ergibt wieder 0. Ersetzt man im ersten Summanden $\mathfrak{r}_s$ durch $\mathfrak{r}_{s'} + \mathfrak{r}_{s's}$, so spaltet er sich in die beiden Teile

$$\frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} (\mathfrak{r}_{s'} \times d\mathfrak{s}') + \frac{\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s}}{r_{s's}^3} (\mathfrak{r}_{s's} \times d\mathfrak{s}')$$

auf, von denen der erste Teil, da $\mathfrak{r}_{s'} \times d\mathfrak{s}'$ von s nicht abhängt, wieder wegen (103) bei der Integration 0 liefert; für den Zähler des zweiten Teiles kann man offenbar schreiben:

$$\mathfrak{r}_{s's} \cdot d\mathfrak{s} \, (\mathfrak{r}_{s's} \times d\mathfrak{s}') = \mathfrak{r}_{s's} \times \{ (\mathfrak{r}_{s's} \times d\mathfrak{s}') \times d\mathfrak{s} \} ,$$

woraus hervorgeht, daß er mit dem entsprechenden Summanden von $\mathfrak{M}'$ zusammengefaßt ebenfalls 0 liefert.

Dritter Abschnitt.

Das entsprechende ebene Problem.

32. Alle vorstehenden im Raum durchgeführten Überlegungen lassen sich mit geringen Änderungen auf die Ebene übertragen. Dabei stellen wir uns in bekannter Weise

die ebene (in der x, y-Ebene verlaufende) Strömung stets als eine räumliche von der Höhe 1 vor, und beachten, daß in alle Überlegungen und Rechnungen im Endresultat nur die (zur z-Achse parallelen) Mantellinien und -flächen bzw. deren Spuren in der x, y-Ebene, nicht aber die (zur x, y-Ebene parallelen) Grund- und Deckflächen eingehen; kurz ausgedrückt: Wir denken räumlich, rechnen aber in der Spuren-Ebene x, y. Demgemäß übernehmen wir auch die Bezeichnungen von früher; dabei ist jetzt z. B. unter $d\tau$ das Produkt $df \cdot 1$ zu verstehen, wo df die Spur des Zylinderchens vom Inhalt $d\tau$ bedeutet. — Wir wollen jetzt nochmals alle unsere früheren Überlegungen rasch durcheilen und an einigen Stellen die entsprechenden Übertragungen angeben bzw. andeuten.

33. Die Potentiale ebener Quellen und Dipole unterscheiden sich von den entsprechenden räumlichen dadurch, daß 4π durch 2π und $\frac{1}{r}$ durch $\log\frac{1}{r}$ zu ersetzen ist. Als Reihenentwicklung für eine Quelle bzw. einen Dipol hat man in Analogie zu (8)

$$(105)\quad \begin{cases} -\dfrac{e}{2\pi}\log\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{-e}{2\pi}\log\dfrac{1}{r} + \dfrac{e}{2\pi}(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\log\dfrac{1}{r} + \cdots \\ \dfrac{1}{2\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)\log\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{1}{2\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)\log\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{2\pi}(\mathfrak{d}\cdot\nabla)(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\log\dfrac{1}{r} + \cdots, \end{cases}$$

aus denen ähnlich wie im Raume folgt: Zwei Quellen wirken im Unendlichen bis auf Glieder von höherer Ordnung als $\frac{1}{r}$

a) wie die zugehörige Schwerpunktsquelle der Stärke $e_1 + e_2$ in $\dfrac{e_1\mathfrak{a}_1 + e_2\mathfrak{a}_2}{e_1 + e_2}$, falls $e_1 + e_2 \neq 0$;

b) sonst wie der Dipol $e_1\mathfrak{a}_1 + e_2\mathfrak{a}_2$ in O.

Zwei Dipole wirken entsprechend im Unendlichen wie der Dipol $\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2$ in O.

34. Die Unstetigkeitseigenschaften der Quell- und Dipolflächen finden sich in derselben Form auch hier wieder; dasselbe gilt für Wirbelschichten und ihren Zusammenhang mit Dipolbelegungen. Dem geschlossenen Wirbelfaden im Raume entspricht hier das Wirbelpaar (d. h. zwei Wirbel mit entgegengesetzt gleicher Zirkulation). Ist nur ein ebener Wirbel vorhanden, so hat man den ihn zum Wirbelpaar ergänzenden Gegenwirbel im Unendlichen zu suchen, das hier (im Gegensatz zum Raume) stets als innerer Punkt anzusehen ist. Die Ersetzung eines geschlossenen Wirbels, d. h. eines Wirbelpaares der Stärke Γ durch Dipole geschieht analog wie im Raume: Ist eine Kurve C mit Dipolen von der konstanten Dichte Γ besetzt (Fig. 28), so ist das zugehörige Potential

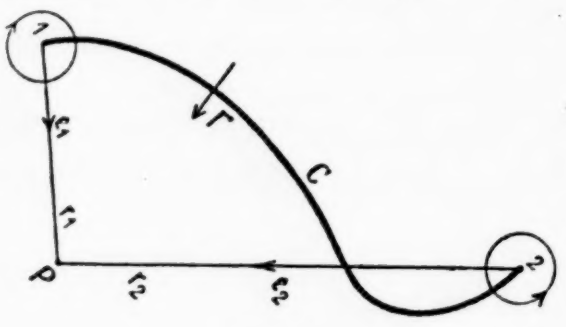


Fig. 28.

$$(106)\qquad \varphi = \frac{-\Gamma}{2\pi}\omega,$$

wo ω der Winkel ist, unter dem C von P aus erscheint. Hieraus folgt das „ebene" Biot-Savartsche Gesetz:

$$(107)\qquad \mathfrak{w} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left\{\frac{\mathfrak{k}\times\mathfrak{e}_2}{r_2} - \frac{\mathfrak{k}\times\mathfrak{e}_1}{r_1}\right\},$$

wo $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ die von den Endpunkten der Kurve nach dem Aufpunkt gezogenen Einheitsvektoren sind; rückt speziell der erste Endpunkt ins Unendliche, so erhält man mit

$\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}$, $r_2 = r$ das Feld eines einzigen Wirbels:

$$\mathfrak{w} = \frac{\Gamma}{2\pi}\mathfrak{k} \times \frac{\mathfrak{e}}{r}\left(= \frac{\Gamma}{2\pi}\mathfrak{k} \times \frac{\mathfrak{r}}{r^2}\right), \tag{107a}$$

für das man auch

$$\mathfrak{w} = \operatorname*{rot}_P \frac{\Gamma\mathfrak{k}}{2\pi} \log\frac{1}{r} \tag{108}$$

oder auch

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{k} \times \operatorname*{grad}_P \left\{\frac{-\Gamma}{2\pi} \log\frac{1}{r}\right\} \tag{109}$$

schreiben kann. Die letzte Beziehung läßt sich so ausdrücken: Denkt man sich den Wirbel durch eine Quelle von der gleichen Stärke ersetzt, so entsteht das Geschwindigkeitsfeld des Wirbels aus dem der Quelle durch vordere vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{k}$. Ähnlich wie für zwei Quellen gilt auch hier: Zwei Wirbel wirken im Unendlichen bis auf Glieder von höherer Ordnung als $\frac{1}{r}$:

a) wie der zugehörige Schwerpunktswirbel der Stärke $\Gamma_1 + \Gamma_2$ in $\frac{\Gamma_1\mathfrak{a}_1 + \Gamma_2\mathfrak{a}_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$, falls $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$,

b) sonst wie der Dipol $(\Gamma_1\mathfrak{a}_1 + \Gamma_2\mathfrak{a}_2) \times \mathfrak{k} = \Gamma\mathfrak{F}$ mit $\Gamma = \Gamma_2$, wo $\mathfrak{F}$ die orientierte Oberfläche von C ist.

35. Die Resultate von Nr. **17** und Nr. **18** lassen sich sofort übertragen: Ist $\{\operatorname{grad}\varphi\}$ eine eindeutige Potentialströmung im Außenraum A und F die Begrenzung, so kann ein zu $\{\operatorname{grad}\varphi\}$ gehöriges Singularitätensystem Δ_0 auf F wieder aus Quellen und Dipolen, aus Quellen allein, und aus Dipolen allein bestehen.

Was die Ersetzung eines Körpers durch ein Singularitätensystem Δ_i anbetrifft, so gibt es wie im Raum die beiden Möglichkeiten:

$$\Delta_i = \Delta_0\,, \tag{110}$$

$$\Delta_i = \Delta_0 + \mathsf{P}'\,, \tag{111}$$

wobei das innerhalb F befindliche Wirbelsystem P' speziell wieder auf F ausgebreitet sein kann; der zweite Fall bedeutet, daß eine Zirkulation $\Gamma_C = \sum_{P'}\Gamma$ um die Kontur vorhanden ist. — Das außerhalb F und ganz im Endlichen gelegene Singularitätensystem Δ_a ist, wie auch jedes Teilsystem hiervon, stets als abgeschlossen anzusehen, so daß also das im räumlichen Fall auftretende System P hier $= 0$, mithin $\Delta_a = \tilde{\Delta}_a$ ist. Die Haltekraft $\mathfrak{R}_h$ ist dieselbe wie im Raum:

$$\mathfrak{R}_h = \mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{v} + \operatorname{rot}\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}\,. \tag{112}$$

36. Was jedoch den Wert von $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma\end{matrix}\right\}$ anbetrifft (wo $\{\mathfrak{v}\}$ von dem Singularitätensystem Σ erzeugt ist), so besteht im Falle der Momente ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Raum: Während eine analoge Abschätzung wie dort im Falle der Kräfte wieder

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma\end{matrix}\right\} = 0 \qquad \text{(für Kräfte)} \tag{113}$$

ergibt, tut sie dies im Falle der Momente nicht mehr. Betrachten wir den Spezialfall, daß nur eine Quelle e und ein Wirbel Γ vorliegt! (Fig. 29). Hier ergibt sich offenbar ein Moment von der Größe

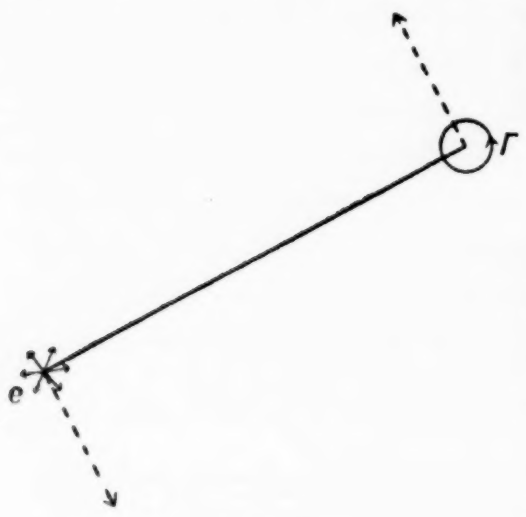


Fig. 29.

$$\frac{e\Gamma}{2\pi}k,$$

das also, wie man sieht, vom gegenseitigen Abstand der Singularitäten nicht abhängt, so daß letzterer auch $= 0$ sein kann. Hat man beliebig viele Quellen und Wirbel von den Gesamtstärken

$$\tilde{e} = \Sigma e, \qquad \tilde{\Gamma} = \Sigma\Gamma,$$

so ist das Moment dasselbe wie das einer Quelle $\tilde{e}$ und eines Wirbels $\tilde{\Gamma}$ in O, d. h. aber es ist

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma\end{matrix}\right\} = \frac{\tilde{e}\,\tilde{\Gamma}}{2\pi}\mathfrak{k}\left(= \frac{\Sigma e\cdot\Sigma\Gamma}{2\pi}\mathfrak{k}\right) \qquad \text{(für Momente)}, \tag{114}$$

woraus die (58a) entsprechende Beziehung

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}_2\\ \Sigma_1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}_1\\ \Sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\tilde{e}_1\tilde{\Gamma}_2 + \tilde{e}_2\tilde{\Gamma}_1}{2\pi}\mathfrak{k} \tag{115}$$

folgt. Speziell gilt also, falls

$$\tilde{e} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \tilde{\Gamma} = 0$$

ist (was z. B. der Fall ist, wenn Σ nur aus Quellen oder nur aus Wirbeln besteht),

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{v}\\ \Sigma\end{matrix}\right\} = 0 \quad (\text{für } \tilde{e} = 0 \text{ oder } \tilde{\Gamma} = 0). \tag{116}$$

Mit dieser kleinen Abänderung im Falle der Momente lassen sich dann alle früheren Überlegungen und Formeln auf die Ebene übertragen.

37. Liegen z. B. nur diskrete Singularitäten vor, so gelten die (77) entsprechenden Formeln

$$\begin{cases} -\mathfrak{R}_F = \sum\limits_A \{e\mathfrak{w}^* + (\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{w}^*)\} - \sum\limits_R \{e\mathfrak{U} + (\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{U})\}, \\ -\mathfrak{M}_F = \sum\limits_A \{(\mathfrak{r}\times e\mathfrak{w}^*) + \mathfrak{r}\times(\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{w}^*)\} - \sum\limits_R \{(\mathfrak{r}\times e\mathfrak{U}) + \mathfrak{r}\times(\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{U})\} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\Sigma e\Sigma\Gamma}{2\pi}\mathfrak{k} \end{cases} \tag{117}$$

wo $\mathfrak{w}^*$ dieselbe Bedeutung hat wie im Raume, also die Geschwindigkeit ohne die betreffende Singularität an der Stelle derselben darstellt. In diesen Formeln können noch folgende Vereinfachungen bzw. Umformungen vorgenommen werden:

$$\begin{cases} \sum\limits_R e\mathfrak{U} = \sum\limits_A e\mathfrak{U}, \\ \sum\limits_R (\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{U}) = (\sum\limits_I \Gamma + \sum\limits_A \Gamma)\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{U} = (\Gamma_C + \sum\limits_A \Gamma)\,\mathfrak{k}\times\mathfrak{U}, \end{cases} \tag{118}$$

wo $\Gamma_C = \sum\limits_I \Gamma$, d. h. = der Zirkulation um die Kontur und daher $\Gamma_C\mathfrak{k}\times\mathfrak{U}$ die Kuttasche Kraft ist; ferner:

$$\mathfrak{r}\times(\Gamma\mathfrak{k}\times\mathfrak{U}) = (\mathfrak{r}\times\Gamma\mathfrak{k})\times\mathfrak{U}. \tag{119}$$

Für zwei punktförmige Quellen e_1, e_2 im Abstand r gilt in Analogie zum räumlichen Fall, daß sie sich mit der Kraft $\frac{e_1 e_2}{2\pi r}$ anziehen; analog stoßen sich zwei Wirbel Γ_1, Γ_2 mit der Kraft $\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi r}$ ab.

Schreibt man $M\mathfrak{k}$ für $-\mathfrak{M}_F$, so ergibt sich mit $\mathfrak{U} = (U, V)$, $\mathfrak{w}^* = (u^*, v^*)$

$$(120)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M} = \sum\limits_A \left\{ e \begin{vmatrix} x & y \\ u^* & v^* \end{vmatrix} + \Gamma \begin{vmatrix} x & y \\ -v^* & u^* \end{vmatrix} \right\} \\ \quad - \sum\limits_R \left\{ e \begin{vmatrix} x & y \\ U & V \end{vmatrix} + \Gamma \begin{vmatrix} x & y \\ -V & U \end{vmatrix} \right\} - \dfrac{\Sigma e \cdot \Sigma \Gamma}{2\pi} . \end{cases}$$

Geht man vermöge der Beziehungen

$$\begin{array}{lll} \overline{P} = X - iY & \text{mit} & (X, Y) = -\mathfrak{K}_F \\ \bar{v} = u - iv & \text{mit} & (u, v) = \mathfrak{w} \\ v_\infty = U - iV & \text{mit} & (U, V) = \mathfrak{U} \\ z = x + iy & \text{mit} & (x, y) = \mathfrak{r} \end{array}$$

und der Rechenregel

$$i(a + ib)\,(p - iq) = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ -q & p \end{vmatrix}$$

zur komplexen Schreibweise über, so erhält man [21])

$$(121)\qquad \begin{aligned} \overline{P} = X - iY &= \sum_A (e\bar{v}^* - i\Gamma\bar{v}^*) - \sum_R \{e\bar{v}_\infty - i\Gamma\bar{v}_\infty) \\ M + iN &= \sum_A (iez\bar{v}^* + \Gamma z\bar{v}^*) - \sum_R \{iez\bar{v}_\infty + \Gamma z\bar{v}_\infty) - i\,\frac{(\Sigma e - i\Sigma\Gamma)^2}{4\pi} . \end{aligned}$$

Nur der Vollständigkeit wegen seien auch noch die entsprechenden Formeln für kontinuierliche Singularitäten angegeben. Ergänzen wir das Potential einer Quelle φ zu einer komplexen Größe $\Omega = \varphi + i\psi$, so erhalten wir nach Fig. 30 und gemäß der bekannten Beziehung $\log \varrho e^{i\psi} = \log \varrho + i\psi$

$$\varphi = \frac{e}{2\pi} \log \varrho \longrightarrow \Omega = \varphi + i\psi = \frac{e}{2\pi} \log (z - z_0) .$$

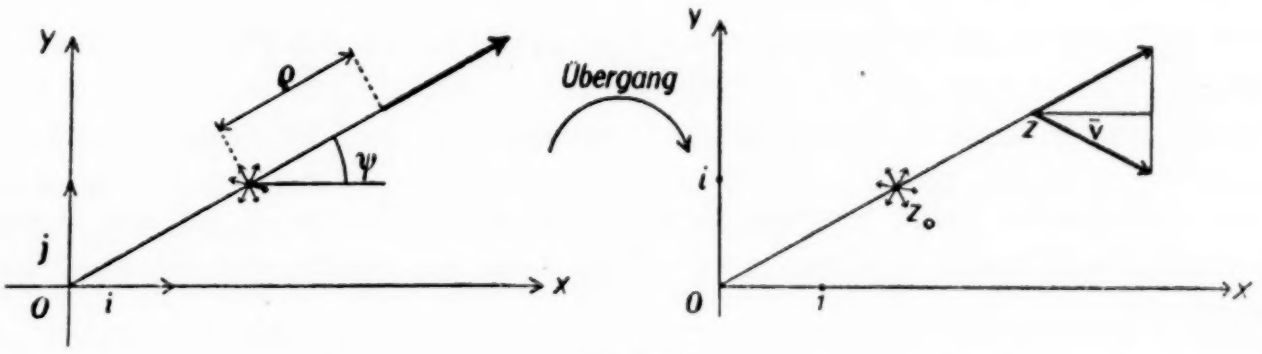


Fig. 30.

Hieraus folgt für die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ die folgende Zuordnung:

$$\mathfrak{w} = \varphi_x \mathfrak{i} + \varphi_y \mathfrak{j} \longrightarrow \bar{v} = \Omega'(z) = \varphi_x + i\psi_x = \varphi_x - i\varphi_y = \frac{e}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$$

(es ist $\psi_x = -\varphi_y$ auf Grund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen). Für einen Wirbel erhalten wir dann gemäß (109) und unter Beachtung, daß durch den Übergang zur komplexen Geschwindigkeit der Drehsinn verkehrt wird, das komplexe Potential aus dem der Quelle, indem wir e durch Γ ersetzen, und den entstehenden Ausdruck noch mit $-i$ multiplizieren (was einer Drehung um -90^0 entspricht)

$$\Omega = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \log (z - z_0) ,$$

d. h. für die komplexe Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \log (z - z_0).$$

---

[21]) Vgl. hierzu auch W. Müller, Mathematische Strömungslehre, Berlin 1928, S. 53, Formel (16), die leider stark mit Druckfehlern durchsetzt ist.

Wegen

$$\frac{1}{z-z_0}=\frac{1}{z}+\frac{z_0}{z^2}+\cdots$$

ergeben sich für die Koeffizienten a_1 und a_2 in der Entwicklung

$$\bar{v}=\bar{v}_\infty+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots$$

die Werte

$$a_1=\frac{1}{2\pi}\,\Sigma\,(e-i\Gamma)\,,\quad a_2=\frac{1}{2\pi}\,\Sigma(ez-i\Gamma z).$$

Die Zusatzglieder in (121) sind dann offenbar

$$-2\pi a_1\bar{v}_\infty \quad \text{und} \quad -i\pi\,(2a_2\bar{v}_\infty+a_1^2),$$

also wegen

$$\bar{v}^2=\bar{v}_\infty^2+\frac{2a_1\bar{v}_\infty}{z}+\frac{2a_2\bar{v}_\infty+a_1^2}{z^2}+\cdots$$

gleich dem Wert der beiden Integrale, in denen K eine Kurve bedeutet, welche alle Singularitäten einschließt:

$$\frac{i}{2}\oint_K\bar{v}^2dz \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}\oint_K\bar{v}^2z\,dz\,.$$

Bedeutet dann rot $\mathfrak{w}$ den Skalar $\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$, so hat man also im Grenzfall eines kontinuierlichen Singularitätenfeldes als komplexe Kraft bzw. komplexes Moment der Flüssigkeit auf den Körper

$$(122)\qquad \begin{aligned} X-iY&=\int_A(\operatorname{div}\mathfrak{w}\cdot\bar{v}-i\operatorname{rot}\mathfrak{w}\cdot\bar{v})\,d\sigma+\frac{i}{2}\oint_K\bar{v}^2dz\,,\\ M+iN&=\int_A(i\operatorname{div}\mathfrak{w}\cdot z\bar{v}+\operatorname{rot}\mathfrak{w}z\bar{v})\,d\sigma-\frac{1}{2}\oint_K\bar{v}^2z\,dz\,. \end{aligned}$$

Liegen im Außenraum keine Singularitäten, so kann die Kurve K auf die Kontur des Körpers zusammengezogen werden; man erhält dann die zuerst von Blasius [22]) angegebenen Formeln:

$$(122\text{a})\qquad X-iY=\frac{i}{2}\oint_K\bar{v}^2dz \quad \text{und} \quad M+iN=-\frac{1}{2}\oint_K\bar{v}^2z\,dz\,.$$

Die (122) entsprechenden inneren Formeln lauten

$$(123)\qquad \begin{aligned} X-iY&=\int_I(\operatorname{div}\mathfrak{w}\bar{v}-i\operatorname{rot}\mathfrak{w}\bar{v})\,d\sigma\,,\\ M+iN&=\int_I(i\operatorname{div}\mathfrak{w}z\bar{v}+\operatorname{rot}\mathfrak{w}z\bar{v})\,d\sigma\,. \end{aligned}$$

---

[22]) H. Blasius, Funktionentheoretische Methoden der Hydrodynamik, Ztschr. f. Math. u. Phys. **58** (1910), S. 90—96.

Eingegangen 28. Februar 1939.

Sekanten und Paratingenten in topologischen Abhängigkeitsräumen.

Von *Otto Haupt* in Erlangen, *Georg Nöbeling* in Erlangen und *Christian Pauc* in Paris.

Einleitung.

In einer früheren Arbeit [1]) wurde bereits der Satz erwähnt, daß die k-dimensionalen Sekanten ϑ eines Kontinuums K eines euklidischen E_m eine zusammenhängende Menge bilden, und es wurde angegeben, in welchen Spezialfällen dieser Satz bereits bewiesen ist. Die Schwierigkeit beim Beweis des allgemeinen Satzes besteht in folgendem. Sind ϑ_1 und ϑ_2 zwei k-dimensionale Sekanten, aufgespannt durch zwei $(k+1)$-Tupel S_1 und S_2 linear unabhängiger Punkte von K, so wird man versuchen, S_1 innerhalb K stetig oder mit $\delta(\varepsilon)$-Schritten in S_2 und dadurch ϑ_1 stetig bzw. mit ε-Schritten in ϑ_2 zu überführen. Dabei kann es nun aber vorkommen, daß das $(k+1)$-Tupel S_1 bei der Überführung seine lineare Unabhängigkeit verliert und infolgedessen keine k-dimensionale Sekante mehr aufspannt. Diese Gefahr besteht insbesondere dann, wenn eine $(k-1)$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit L existiert, welche K zerlegt, weil es dann ohne besondere Vorsichtsmaßregeln geschehen kann, daß bei der Überführung alle Punkte von S_1 gleichzeitig in L zu liegen kommen, also linear abhängig werden.

Unser nachstehender Beweis vermeidet das gleichzeitige Eintreten der Punkte von S_1 in L. Hierzu verhilft eine in der Natur der Sache liegende Darstellung einer gewissen Teilmenge E von $K \cdot L$ als feinste direkte Summe von linear unabhängigen Teilmengen (A-Komponenten [2])) und eine weitere Zerspaltung [3]) der A-Komponenten in gewisse Teilmengen von A-Mannigfaltigkeiten, die durch eine Basis [4]) von E aufgespannt werden.

Unser Beweis liefert den obigen Satz (und einige Folgerungen) in einer ganz allgemeinen Fassung. Abgesehen davon, daß der Beweis für beliebiges k geführt wird, besteht die Verallgemeinerung gegenüber den bisher bekannten Resultaten in folgendem. *Einerseits* tritt an Stelle des euklidischen E_m ein beliebiger metrischer [5]) Raum H, in welchem eine abstrakte Abhängigkeit im Sinne unserer früheren Arbeit [1]) axiomatisch gegeben ist; diese Abhängigkeit A wird mit der Topologie des Raumes durch eine Abgeschlossenheitsforderung für die („linearen") A-Mannigfaltigkeiten verknüpft (Hüllenaxiom [6])). *Ander-*

---

[1]) Haupt-Nöbeling-Pauc, Über Abhängigkeitsräume, Journal f. d. reine u. angew. Math. **181** (1940), S. 193 ff. Diese Arbeit wird im folgenden mit I zitiert.

[2]) I; Nr. 5. 4. III.

[3]) I; Nr. 6. 3.

[4]) I; Nr. 1. 5.

[5]) Es genügen sogar geringere Forderungen. Vgl. im Text Nr. 6. 2.

[6]) Vgl. im Text Nr. 1. 1.

seits sind bei uns die Sekanten nicht mehr [7]) lineare Mannigfaltigkeiten des Grundraumes H, sondern den unabhängigen $(k+1)$-Tupeln $[x_1, \ldots, x_{k+1}]$ aus H eindeutig zugeordnete Punkte ϑ eines von uns so genannten Zusammenhangsraumes Θ, d. h. einer Menge beliebiger Elemente, in welcher lediglich ein Zusammenhangsbegriff mit einem einzigen Axiom eingeführt ist [8]); verlangt wird dabei nur, daß erstens gewisse (nicht unbedingt alle) unabhängigen Punktsysteme $[x_1, \ldots, x_{k+1}]$, die in derselben, von einem solchen System aufgespannten („linearen") A-Mannigfaltigkeit liegen, dieselbe Sekante ϑ erzeugen (schwaches Äquivalenzaxiom (Θ_a) [9])), und daß zweitens die Sekanten $\vartheta[x_1, \ldots, x_{k+1}]$ von den Punkten x_i partiell stetig abhängen (Stetigkeitsaxiom (Θ_s) [10])). Diese allgemeine Fassung des Abhängigkeits- und Sekantenbegriffes gestattet es, etwa im euklidischen Raum die Sekanten nicht nur als lineare Mannigfaltigkeiten zu interpretieren, sondern es fallen unter unsere Begriffe und Sätze auch Sekanten, welche Sphären, algebraische Mannigfaltigkeiten usw. sind [11]).

Wesentliche Hilfsmittel bei unseren Überlegungen sind der Randsatz von Janiszewski [12]) bzw. der Brückensatz [13]). Diese Sätze sind übrigens die einzigen über die drei Umgebungsaxiome von Hausdorff [14]) hinausgehenden Eigenschaften des Grundraumes H, die wir beim Beweis heranziehen müssen.

Am Schluß der Arbeit wird für den Fall eines lokal zusammenhängenden Kontinuums noch der Satz über die Kontinuität des lokalen Paratingents bewiesen. Das entsprechende Problem im Falle eines nicht lokal zusammenhängenden Kontinuums werden wir hier unerörtert lassen.

§ 1. Topologische Abhängigkeitsräume.

1. 1. Es sei H eine nicht leere Menge, deren Elemente Punkte heißen. Diese Menge H sei erstens ein *topologischer Raum*, d. h. in H sei ein Umgebungssystem definiert, welches den ersten drei Axiomen von Hausdorff [14]) genügt; damit ist gleichbedeutend [15]), daß jeder Teilmenge E von H eine Teilmenge $\overline{E}$ von H als abgeschlossene Hülle zugeordnet ist, welche die vier Axiome von Kuratowski [15]) erfüllt. In H sei zweitens eine *Abhängigkeit endlicher Punktsysteme* [1]) erklärt. Drittens sei diese Abhängigkeit mit der Topologie von H verknüpft durch das folgende

Hüllenaxiom:

(H) *Jede A-Mannigfaltigkeit ist eine abgeschlossene Menge.*

Hierbei betrachten wir auch die Menge L^0 der singulären Punkte von H als eine A-Mannigfaltigkeit (I; Nr. **1.** 5). Einen den vorstehenden Forderungen genügenden Raum nennen wir einen **topologischen Abhängigkeitsraum** und bezeichnen ihn mit $[H; T; A]$. Ist speziell die Topologie des Raumes durch eine Metrik gegeben, so sprechen wir von einem metrischen Abhängigkeitsraum und bezeichnen ihn mit $[H; M; A]$.

---

[7]) Hierin besteht, unter anderem, ein Unterschied unseres Standpunktes gegenüber dem von Herrn Torrance (vgl. I, Fußnote 6). Die Ergebnisse von Herrn Torrance ordnen sich den unsrigen unter. Vgl. im Text Nr. **4.** 2, Zusatz.

[8]) Vgl. im Text Nr. **2.** 3.

[9]) Vgl. im Text Nr. **2.** 1.

[10]) Vgl. im Text Nr. **2.** 4.

[11]) Vgl. im Text Nr. **2.** 4, Beispiele.

[12]) Z. Janiszewski, Sur les continus irréductibles entre deux points, Thèse (Paris 1911) = Journ. École Polyt. (2) **16** (1912), S. 100. Vgl. auch im Text Nr. **5.** 1.

[13]) Vgl. im Text Nr. **5.** 1.

[14]) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 213.

[15]) Vgl. z. B. P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie **1**, Berlin 1935, S. 37 und 43.

1. 2. In einem Raum $[H; T; A]$ gelten folgende Sätze, welche zeigen, wie sich Rang, Äquivalenz, Basis usw. von Mengen auf ihre abgeschlossenen Hüllen übertragen.

1. 2. 1. *Für jede Menge E gilt $L(E) = L(\bar{E})$.*

Beweis. Aus $E < L(E)$ folgt $\bar{E} < L(E)$ wegen (H). Also gilt $L(\bar{E}) < L(E)$. Anderseits folgt aus $E < \bar{E}$, daß $L(E) < L(\bar{E})$ gilt. Also ist $L(E) = L(\bar{E})$.

1. 2. 2. *Für jede Menge E gilt Rang (E) = Rang $(\bar{E})$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Nr. **1.** 2. 1 und I; Nr. **4.** 1. II, worin man T durch E und E durch H ersetzt.

1. 2. 3. *Aus $E \approx F$ folgt $\bar{E} \approx \bar{F}$ und umgekehrt.*

Beweis. $M \approx N$ bedeutet, daß $L(M) = L(N)$ ist (I; Nr. **4.** 2). Nun ist $L(E) = L(\bar{E})$ und $L(F) = L(\bar{F})$ nach Nr. **1.** 2. 1. Also ist $L(E) = L(F)$ gleichbedeutend mit $L(\bar{E}) = L(\bar{F})$.

1. 2. 4. *Jede Basis (bzw. innere Basis) einer Menge E ist auch eine Basis (bzw. innere Basis) von $\bar{E}$. Umgekehrt ist jede Basis von $\bar{E}$ auch eine Basis von E.*

Beweis. Ein unabhängiges Punktsystem S ist dann und nur dann eine Basis einer Menge T, wenn $L(S) = L(T)$ ist (I; Nr. **4.** 2; man ersetze E durch H). Da $L(E) = L(\bar{E})$ ist (Nr. **1.** 2. 1), ist eine Basis S von E eine Basis von $\bar{E}$ und umgekehrt. Ist speziell S eine innere Basis von E, d. h. ist S ein Teilsystem von E, so ist S auch ein Teilsystem von $\bar{E}$, d. h. S eine innere Basis von $\bar{E}$.

1. 2. 5. *Sind die Mengen $E_1, \ldots, E_n$ voneinander unabhängig, so auch die Mengen $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_n$, und umgekehrt ($n \geqq 2$).*

Beweis. Die Unabhängigkeit der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ voneinander ist gleichbedeutend damit, daß die Ränge der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ endlich sind und $\mathrm{Rang}(M_1 + \cdots + M_n) = \mathrm{Rang}(M_1) + \cdots + \mathrm{Rang}(M_n)$ ist (I; Nr. **5.** 1). Nun ist $\mathrm{Rang}(E_1 + \cdots + E_n) = \mathrm{Rang}\overline{(E_1 + \cdots + E_n)}$ (Nr. **1.** 2. 2), also, da

$$\overline{E_1 + \cdots + E_n} = \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n$$

ist, $\mathrm{Rang}(E_1 + \cdots + E_n) = \mathrm{Rang}(\bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n)$. Anderseits ist $\mathrm{Rang}(E_\nu) = \mathrm{Rang}(\bar{E}_\nu)$ für $\nu = 1, \ldots, n$ (Nr. **1.** 2. 2). Also sind die Gleichungen

$$\mathrm{Rang}(E_1 + \cdots + E_n) = \mathrm{Rang}(E_1) + \cdots + \mathrm{Rang}(E_n)$$

und

$$\mathrm{Rang}(\bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n) = \mathrm{Rang}(\bar{E}_1) + \cdots + \mathrm{Rang}(\bar{E}_n)$$

gleichbedeutend.

1. 2. 6. *Ist $E = E_1 + \cdots + E_n$ eine direkte Summe bzw. eine direkte Zerlegung, so auch $\bar{E} = \bar{E}_1 + \cdots + \bar{E}_n$, und umgekehrt.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Definition der direkten Summe bzw. Zerlegung (I; Nr. **5.** 3), aus Nr. **1.** 2. 2 und Nr. **1.** 2. 5.

1. 2. 7. *Ist $E = L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_k)$ die Zerspaltung der Menge E bezüglich der Basis S von E, so ist $\bar{E} = L_{\bar{E}}(S_1) + \cdots + L_{\bar{E}}(S_k)$ die Zerspaltung von $\bar{E}$ bezüglich der Basis S von $\bar{E}$, und umgekehrt.*

Beweis. Die Darstellung $F = L_F(S_1) + \cdots + L_F(S_k)$ einer Menge F bzgl. der Basis S von F ist die eindeutig bestimmte *Zerspaltung* von F bzgl. S, wenn folgendes gilt: a) die S_i ($i = 1, \ldots, k$) sind (echte oder unechte) Seiten von S und kein S_i ist eine (echte oder unechte) Seite eines S_j ($i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, k$); b) es gilt $F < L(S_1) + \cdots + L(S_k)$; c) $L(S_i)$ enthält mindestens einen Punkt von F in allgemeiner Lage bzgl. S_i, d. h. einen

Punkt von F, der in keiner echten Seitenmannigfaltigkeit von S_i liegt ($i = 1, \ldots, k$) (vgl. I; Nr. **6.** 3). Ist nun $E = L_E(S_1) + \cdots + L_E(S_k)$ die Zerspaltung von E bzgl. der Basis S von E, so gilt: S ist eine Basis von $\bar{E}$ (Nr. **1.** 2. 4); aus b) für $F = E$ folgt b) für $F = \bar{E}$ wegen (H); aus c) für $F = E$ folgt c) für $F = \bar{E}$ wegen $E < \bar{E}$. Also ist $\bar{E} = L_{\bar{E}}(S_1) + \cdots + L_{\bar{E}}(S_k)$ die Zerspaltung von $\bar{E}$ bzgl. S. Es sei umgekehrt $\bar{E} = L_{\bar{E}}(S_1) + \cdots + L_{\bar{E}}(S_k)$ die Zerspaltung von $\bar{E}$ bzgl. der Basis S von $\bar{E}$. Dann ist S auch eine Basis von E (Nr. **1.** 2. 4). Ist nun $E = L_E(T_1) + \cdots + L_E(T_h)$ die Zerspaltung von E bzgl. S, so ist $\bar{E} = L_{\bar{E}}(T_1) + \cdots + L_{\bar{E}}(T_h)$ nach dem soeben bewiesenen die Zerspaltung von $\bar{E}$ bzgl. S. Da es für jede Menge bzgl. einer Basis S nur eine einzige Zerspaltung gibt (I; Nr. **6.** 3), muß $h = k$ und bei geeigneter Numerierung $S_1 = T_1, \ldots, S_k = T_k$ sein.

1. 2. 8. *Eine Seite von S ist maximal ausgezeichnet bzgl. E dann und nur dann, wenn sie maximal ausgezeichnet bzgl. $\bar{E}$ ist.*

Beweis. Folgt aus Nr. **1.** 2. 7 und I; Nr. **6.** 3.

1. 2. 9. *Sind $K_1, \ldots, K_r$ die* mod L^0 *eindeutig bestimmten A-Komponenten von E, so sind $\bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_r$ die* mod L^0 *eindeutig bestimmten A-Komponenten von $\bar{E}$.*

Beweis. Folgt aus Nr. **1.** 2. 7 und I; Nr. **5.** 4. III sowie I; Nr. **6.** 4. 1.

§ 2. Die Sekanten ϑ.

2. 1. Es sei $[H; A]$ ein Abhängigkeitsraum und Θ eine Menge irgendwelcher Elemente ϑ. Für ein **festes** natürliches $n \geqq 2$ sei jedem (ungeordneten) unabhängigen Punktsystem $S = [x_1, \ldots, x_n]$ aus $[H; A]$ ein Element $\vartheta = \vartheta(S) = \vartheta[x_1, \ldots, x_n]$ aus Θ eindeutig zugeordnet. Diese Abbildung genüge folgender

Schwachen Äquivalenzbedingung:

(Θ_a) *Aus* $U[x_1, \ldots, x_n]$ *und* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}] \approx [x_1', x_2, \ldots, x_{n-1}]$ *folgt*

$$\vartheta[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \vartheta[x_1', x_2, \ldots, x_n].$$

Sind diese Forderungen erfüllt, so bezeichnen wir die Elemente $\vartheta[x_1, \ldots, x_n]$ als **Sekanten** (genauer Θ-Sekanten), die durch die unabhängigen Systeme $S = [x_1, \ldots, x_n]$ aufgespannt werden. Indem wir alle Elemente von Θ, die keinem System S als Sekanten zugeordnet sind, aus Θ von vornherein weglassen, bezeichnen wir Θ als **Sekantenraum** von $[H; A]$ (obwohl vorläufig in Θ noch keine Topologie irgendwelcher Art vorausgesezt wird).

Wir führen noch einige abkürzende **Bezeichnungen** ein. Ist $[E_1, \ldots, E_n]$ ein (ungeordnetes) System irgendwelcher Mengen aus $[H; A]$, so bezeichnen wir mit $\vartheta[E_1, \ldots, E_n]$ die Menge aller Sekanten $\vartheta[x_1, \ldots, x_n]$, für welche $x_1 \varepsilon E_1, \ldots, x_n \varepsilon E_n$ gilt. Existiert kein unabhängiges System $[x_1, \ldots, x_n]$ mit $x_\nu \varepsilon E_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$), so setzen wir $\vartheta[E_1, \ldots, E_n]$ gleich der leeren Menge, die wir als Teilmenge von Θ betrachten. Ist speziell

$$E_1 = \cdots = E_n = E,$$

so setzen wir $\vartheta[E_1, \ldots, E_n] = \vartheta(E)$ und nennen die Elemente von $\vartheta(E)$ die **von** E **aufgespannten Sekannten.**

2. 2. Es gelten folgende Sätze über die Gleichheit von Sekanten:

2. 2. 1. *Aus* $U[x_1, \ldots, x_n]$ *und* $[x_1, \ldots, x_{n-1}] \approx [x_1', \ldots, x_{n-1}']$ *folgt*

$$\vartheta[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \vartheta[x_1', \ldots, x_{n-1}', x_n]$$

Beweis. Indem wir die Punkte $x_1', \ldots, x_{n-1}'$ nötigenfalls umnumerieren, dürfen wir annehmen, daß $U[x_1, \ldots, x_\nu, x_{\nu+1}', \ldots, x_{n-1}']$ gilt für $\nu = 1, \ldots, n-1$ (I; Nr. **2.** 2. III),

so daß also für $\nu = 1, \ldots, n-1$ gilt

$$[x_1, \ldots, x_\nu, x'_{\nu+1}, \ldots, x'_{n-1}] \approx [x_1, \ldots, x'_\nu, x'_{\nu+1}, \ldots, x'_{n-1}]$$

(I; Nr. **1.** 5 und I; Nr. **2.** 1. 3). Daher gilt wegen (Θ_a) für $\nu = 1, \ldots, n-1$

$$\vartheta[x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu, x'_{\nu+1}, \ldots, x'_{n-1}, x_n] = \vartheta[x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x'_\nu, x'_{\nu+1}, \ldots, x'_{n-1}, x_n].$$

Diese $n-1$ Gleichungen zusammen ergeben die Behauptung.

Zusatz. Durch die schwache Äquivalenzbedingung (Θ_a) ist nicht gewährleistet, daß aus $U[x_1, \ldots, x_n]$ und $[x_1, \ldots, x_n] \approx [x'_1, \ldots, x'_n]$ folgt $\vartheta[x_1, \ldots, x_n] = \vartheta[x'_1, \ldots, x'_n]$, daß also m. a. W. für jede Mannigfaltigkeit $E = L[x_1, \ldots, x_n]$ die Sekantenmenge $\vartheta(E)$ genau ein Element enthält [16]). Dies folgt aus (Θ_a) allerdings dann, wenn E direkt zerlegbar ist, wie der Satz **2.** 2. 2. 1 zeigen wird. Zunächst beweisen wir:

2. 2. 2. *Die beiden Mengen E und E' mit $Rang(E) = Rang(E') \leqq n$ seien direkt zerlegbar: $E = E_1 + \cdots + E_m$ und $E' = E'_1 + \cdots + E'_m$, derart, daß $E_1 \approx E'_1, \ldots, E_m \approx E'_m$ gilt $(m \geqq 2)$. Dann ist $\vartheta(E) = \vartheta(E')$.*

Beweis. Ist $\mathrm{Rang}(E) = \mathrm{Rang}(E') < n$, so sind $\vartheta(E)$ und $\vartheta(E')$ leer, also gleich. Es sei nun $\mathrm{Rang}(E) = \mathrm{Rang}(E') = n$. Weiter seien $S = [x_1, \ldots, x_n]$ und $S' = [x'_1, \ldots, x'_n]$ unabhängige Punktsysteme aus E bzw. E'. Dann ist $S \cdot E_\mu$ bzw. $S' \cdot E'_\mu$ eine innere Basis von E_μ bzw. E'_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$ (I; Nr. **5.** 2. VI). Indem wir nötigenfalls eine Umnumerierung vornehmen, dürfen wir annehmen, daß $S \cdot E_\mu = [x_{i_\mu}, \ldots, x_{i_{\mu+1}-1}]$ und $S' \cdot E'_\mu = [x'_{i_\mu}, \ldots, x'_{i_{\mu+1}-1}]$ ist für $\mu = 1, \ldots, m$, wobei $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1} = n+1$ ist. Da $S \cdot E_\mu \approx S' \cdot E'_\mu$ ist wegen $E \approx E'$, und $i_{\mu+1} - i_\mu < n$ ist, so folgt aus Nr. **2.** 2. 1

$$\vartheta[x_1, \ldots, x_{i_\mu-1}, x_{i_\mu}, \ldots, x_{i_{\mu+1}-1}, x'_{i_{\mu+1}}, \ldots, x'_n]$$
$$= \vartheta[x_1, \ldots, x_{i_\mu-1}, x'_{i_\mu}, \ldots, x'_{i_{\mu+1}-1}, x'_{i_{\mu+1}}, \ldots, x'_n] \text{ für } \mu = 1, \ldots, m.$$

Diese m Gleichungen zusammen ergeben $\vartheta[x_1, \ldots, x_n] = \vartheta[x'_1, \ldots, x'_n]$. Da diese Gleichung für je zwei unabhängige Punktsysteme $[x_1, \ldots, x_n]$ und $[x'_1, \ldots, x'_n]$ aus E bzw. E' gilt, so folgt, daß $\vartheta(E)$ und $\vartheta(E')$ ein einziges Element enthalten, und zwar dasselbe. Also ist $\vartheta(E) = \vartheta(E')$.

2. 2. 2. 1. *Ist die Menge E mit $Rang(E) = n$ direkt zerlegbar, so enthält $\vartheta(E)$ genau ein Element.*

Beweis. Ist $E = E_1 + \cdots + E_m$ eine direkte Zerlegung von E, so setzen wir $E = E'$ und $E_1 = E'_1, \ldots, E_m = E'_m$. Dann folgt die Behauptung aus der Schlußbemerkung des Beweises von Nr. **2.** 2. 2.

Beispiele von ϑ-Räumen. Es ist $[H; A]$ der euklidische E_n, $1 < n$, mit der wie üblich erklärten linearen Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit für p Punkte, $2 \leqq p \leqq n$ (vgl. I, Nr. **1.** 4) und mit $\vartheta[x_1, \ldots, x_p] = L[x_1, \ldots, x_p]$ oder $\vartheta[x_1, \ldots, x_p]$ gleich der Richtung von $L[x_1, \ldots, x_p]$. Entsprechend, wenn $[H; A]$ der Hilbertsche Raum ist mit der wie für den E_n erklärten Abhängigkeit. Ferner: Es ist $[H; A]$ der projektive P_n bzw. die zweidimensionale Sphäre bzw. die Gaußsche Zahlenebene einschließlich des P_∞ usw. mit den in I, Nr. **1.** 4 erklärten Abhängigkeiten, wobei dann $\vartheta[x_1, \ldots, x_p]$ jeweils gleich den $L[x_1, \ldots, x_p]$ ist (insbesondere also gleich einem Kreis, einem Kegelschnitt, einer Sphäre usw.).

2. 3. Es sei Z eine nicht leere Menge irgendwelcher Elemente, welche Punkte heißen. Gewisse Teilmengen von Z, darunter die leere Menge und die einpunktigen Mengen, mögen zusammenhängend heißen; dabei sei folgendes Axiom erfüllt:

---

[16]) Betr. eine schärfere Äquivalenzbedingung vgl. eine spätere Mitteilung.

Zusammenhangsaxiom:

(Z) *Die Summe zweier zusammenhängender Mengen mit nicht-leerem Durchschnitt ist zusammenhängend.*

Sind diese Forderungen erfüllt, so wollen wir Z einen **Zusammenhangsraum** nennen.

Beispiele solcher Zusammenhangsräume. a) Jeder Fréchetsche V-Raum [17]), wenn darin der Begriff „zusammenhängend", wenigstens für abgeschlossene Mengen, im üblichen Sinne erklärt ist (Unzerlegbarkeit in zwei fremde, relativ abgeschlossene Mengen [18])); b) Jeder metrische Raum, wenn darin der Begriff „zusammenhängend" im Sinne von η-verkettet ($\eta > 0$ fest) erklärt wird [19]); c) Es sei M eine nicht leere Menge, f ein System von Teilmengen von M. Man erkläre eine Teilmenge X von M als zusammenhängend, wenn für je zwei Mengen F_1, F_2 von f, welche X treffen (d. h. für welche $F_1 X$, $F_2 X$ beide nicht leer sind) und von welchen X überdeckt wird (d. h. $X < F_1 + F_2$), der Durchschnitt XF_1F_2 nicht leer ist. Im Beispiel c) ist Beispiel a) als spezieller Fall enthalten, wenn man für f das System der abgeschlossenen Mengen nimmt.

2. 4. Es seien nun der Abhängigkeitsraum $[H; A]$ und der Sekantenraum Θ (Nr. **2.** 2) Zusammenhangsräume. Wir nennen die Sekanten ϑ **partiell stetig,** wenn folgendes **Stetigkeitsaxiom** erfüllt ist:

(Θ_s) *Für jedes unabhängige Punktsystem* $[a_2, \ldots, a_n]$ *aus* $[H; A]$ *bildet die Abbildung* $f(x) = \vartheta[x, a_2, \ldots, a_n]$ *jede zusammenhängende Teilmenge von* $[H; A] - L[a_2, \ldots, a_n]$ *auf eine zusammenhängende Teilmenge von* Θ *ab.*

Beispiele von Räumen mit derart partiell stetigen Sekanten werden durch die in Nr. **2. 2. 2. 1** aufgezählten Beispiele geliefert.

§ 3. Über die Sekanten und Grenzsekanten eines Kontinuums.

3. 1. Es sei $[H; T; A]$ ein topologischer Abhängigkeitsraum (Nr. **1.** 1). Für ein festes natürliches $n \geqq 2$ sei jedem unabhängigen Punktsystem $[x_1, \ldots, x_n]$ aus $[H; T; A]$ ein Punkt $\vartheta[x_1, \ldots, x_n]$ eines Zusammenhangsraumes Θ als Sekante eindeutig zugeordnet (Nr. **2.** 1). Diese Sekanten seien partiell stetig (Nr. **2.** 4). Dann gilt:

3. 2. Satz [20]). *Es sei K ein Kontinuum* [21]) *aus* $[H; T; A]$, *das fremd ist zur Menge L^0 der singulären Punkte von* $[H; T; A]$. *Dann sind je zwei von K aufgespannte Sekanten enthalten in einer zusammenhängenden Teilmenge der Menge $\vartheta(K)$ aller von K aufgespannten Sekanten.*

Bemerkung. Man beachte, daß *eine Äquivalenzbedingung*, wie sie hier im Sekantenbegriff mitgefordert wird (vgl. Nr. **2.** 1), für die Gültigkeit des Satzes *nicht entbehrt werden kann.* Beispiel: Es sei $[H; M; A]$ der euklidische E_2 mit der üblichen (linearen) Abhängigkeit. Ferner sei das Kontinuum K in E_2 folgendermaßen erklärt: K ist Summe der drei Verbindungsstrecken des Nullpunktes $O = (0, 0)$ eines kartesischen x, y-Systems mit den drei Punkten $X_1 = (1, 0)$, $Y_1 = (0, 1)$ und $E = (1, 1)$. Jedem unabhängigen

---

[17]) Vgl. z. B. M. Fréchet, Les espaces abstraits, Paris 1928, S. 175; auch A. Appert, Propriétés des espaces abstraits les plus généraux, Actualités scientifiques et industrielles **145**, Paris 1934, S. 7. Die V-Räume sind, kurz gesagt, Punktmengen, in welchem der Begriff der Ableitung M' einer jeden Menge M erklärt und monoton ist, d. h. für $M < Q$ stets $M' < Q'$ ist.

[18]) Vgl. Appert, a. a. O. [17]), S. 39.

[19]) Vgl. z. B. Alexandroff-Hopf, a. a. O. [15]), S. 116.

[20]) Betr. die bisher schon bewiesenen Spezialfälle dieses Satzes vgl. I, Einleitung, auch oben im Text Nr. **2.** 2, Zusatz.

[21]) Unter einem **Kontinuum** verstehen wir hier ein zusammenhängendes Kompaktum. Dabei bedeutet Kompaktum stets: Metrisierbare und in sich kompakte Menge. Und zusammenhängend bedeutet: Nicht darstellbar als Summe zweier nicht leerer, fremder, relativ abgeschlossener Mengen.

Punkttripel $[P_1P_2P_3]$ ordnen wir als Sekante $\vartheta[P_1P_2P_3]$ das Tripel $[P_1P_2P_3]$ selbst zu. Die beiden je linear unabhängigen Punkttripel $[O, X_1, Y_1]$ und $[E, X_1, Y_1]$ liegen in verschiedenen Komponenten des Raumes aller unabhängigen Tripel von K. —

Beweis. Hat K einen Rang $< n$, so ist die Menge $\vartheta(K)$ leer und daher nichts zu beweisen. Nun habe K entweder einen endlichen Rang $\geqq n$ oder keinen endlichen Rang. Es ist zu beweisen: Sind $[x_1, \ldots, x_n]$ und $[y_1, \ldots, y_n]$ zwei beliebige unabhängige Punktsysteme aus K, so sind die von ihnen aufgespannten Sekanten $\vartheta[x_1, \ldots, x_n]$ und $\vartheta[y_1, \ldots, y_n]$ in einer zusammenhängenden Teilmenge von $\vartheta(K)$ enthalten. Indem wir nötigenfalls die Punkte $y_1, \ldots, y_n$ umnumerieren, dürfen wir annehmen, daß $U[x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, \ldots, y_n]$ gilt für $i = 2, \ldots, n$ (I.; Nr. **2.** 2. III). Also genügt es, wegen (Z) (Nr. **2.** 3), zu zeigen, daß für jedes $i = 2, \ldots, n$ die Sekanten $\vartheta[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n]$ und $\vartheta[x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n]$ in einer zusammenhängenden Teilmenge von $\vartheta(K)$ enthalten sind. Dies aber ergibt sich aus folgendem Satz, wenn man darin $K_1 = \cdots = K_n = K$, $x = x_i$, $y = y_i$, $a_2 = x_1$, $a_3 = x_2$, $\ldots$, $a_i = x_{i-1}$, $a_{i+1} = y_{i+1}$, $\ldots$, $a_n = y_n$ setzt.

3. 2. 1. **Satz.** *Es seien $K_1, \ldots, K_n$ zur Menge L^0 der singulären Punkte fremde Kontinua aus $[H; T; A]$, deren Summe mit K bezeichnet werde. Weiter sei $S = [a_2, \ldots, a_n]$ ein unabhängiges Punktsystem aus K derart, daß K_1 nicht in der durch S aufgespannten Mannigfaltigkeit $L = L(S)$ enthalten ist. Dann sind für je zwei Punkte x und y aus $K_1 - L$ die Sekanten $\vartheta[x, a_2, \ldots, a_n]$ und $\vartheta[y, a_2, \ldots, a_n]$ in einer zusammenhängenden Teilmenge von $\vartheta(K)$ enthalten.*

3. 3. Dem *Beweise* des Satzes **3.** 2. 1 schicken wir nachstehende Bemerkungen voraus.

3. 3. 1. **Bezeichnungen.** Gehören zwei Elemente ϑ_1, ϑ_2 des ϑ-Raumes der gleichen zusammenhängenden Teilmenge von $\vartheta(K)$ an, so schreiben wir für die Dauer dieses Beweises kurz $\vartheta_1 \sim \vartheta_2$; ist insbesondere $\vartheta_1 = \vartheta[x', a_2, \ldots, a_n]$ und $\vartheta_2 = \vartheta[y', a_2, \ldots, a_n]$, wo x' und y' Punkte aus $K_1 - L$ bedeuten, so schreiben wir auch $x' \sim y'$. Diese Relation $\sim$ ist determiniert, reflexiv, symmetrisch und transitiv (vgl. Nr. **2.** 3., (Z)). Ferner bezeichnen wir im folgenden mit $x, y, z, \ldots$ Punkte aus $K_1' = K_1 - L$. Jeder solche Punkt ist enthalten in einer Komponente von K_1', die wir mit dem entsprechenden großen Buchstaben $X, Y, Z, \ldots$ bezeichnen; Häufungspunkte einer solchen Komponente $X, Y, Z, \ldots$, welche in L liegen, sollen (soweit vorhanden) mit $h_x, h_y, h_z, \ldots$ bezeichnet werden. Die Buchstaben $a, b, \ldots, h$ (evtl. mit irgendwelchen Indizes versehen) bedeuten immer Punkte von L.

3. 3. 2. **Annahmen** (*ohne Beschränkung der Allgemeinheit*). Bei unserem Beweise dürfen wir annehmen, daß der gegebene topologische Abhängigkeitsraum $[H; T; A]$ *mit K identisch* ist; denn lassen wir aus $[H; T; A]$ alle nicht in K enthaltenen Punkte weg (vgl. I; Nr. **3.** 3), so bleibt dadurch der zu beweisende Satz unberührt. Wir können daher $H = K = K_1 + \cdots + K_n$ als einen *metrischen* Abhängigkeitsraum *ohne singuläre Punkte* voraussetzen (weil nämlich K zu L^0 fremd ist). Ebenso können wir o. B. d. A. voraussetzen, daß K_1 *zu L nicht fremd ist*; denn anderenfalls folgt $x \sim y$ unmittelbar aus (Θ_s) (Nr. **2.** 4), weil K_1 zusammenhängend ist. Ist nun K_1 zu L nicht fremd, so besitzt[22]) jede Komponente Z der Menge $K_1' = K_1 - L$ mindestens einen Häufungspunkt in L, d. h. der Durchschnitt $L \cdot \bar{Z}$ ist nicht leer. Wir setzen $L \cdot (\Sigma \bar{Z}) = E$, wobei über alle Komponenten Z von K_1' summiert wird; diese *Menge E aller in L gelegenen* **Komponentenhäufungspunkte** *von K_1'* ist also nicht leer. (Sie ist leer, wenn und nur wenn K_1

[22]) Randsatz von Janiszewski (vgl. Nr. **5.** 1.).

zu L fremd ist.) Da der Raum K keine singulären Punkte enthält, besitzt also E einen positiven Rang $m-1$, welcher wegen $E < L[a_2, \ldots, a_n]$ nicht größer als $n-1$ ist. Nun sei $[b_2, \ldots, b_m]$ eine innere Basis von E. Indem wir nötigenfalls die Punkte $a_2, \ldots, a_n$ umnumerieren, dürfen wir annehmen, daß $[b_2, \ldots, b_m, a_{m+1}, \ldots, a_n]$ eine Basis von L ist (I; Nr. 2. 2. IV). Dann ist also $[a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n] \approx [b_2, \ldots, b_m, a_{m+1}, \ldots, a_n]$ und daher $\vartheta[z, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n] = \vartheta[z, b_2, \ldots, b_m, a_{m+1}, \ldots, a_n]$ für jeden Punkt z von $K-L$ (Nr. 2. 2. 1). Ersetzen wir daher die Punkte $a_2, \ldots, a_m$ durch die Punkte $b_2, \ldots, b_m$ und bezeichnen sodann diese letzteren wieder mit $a_2, \ldots, a_m$, so ergibt sich, daß o. B. d. A. angenommen werden kann: *Ein Teilsystem* $S_e = [a_2, \ldots, a_m]$, $m \leqq n$, *der Basis* $S = [a_2, \ldots, a_n]$ *von* $L = L(S)$ *ist eine innere Basis der Menge* E *der (in* L *gelegenen) Komponentenhäufungspunkte von* $K_1' = K_1 - L$.

3. 3. 3. Indem wir die soeben zusammengestellten Annahmen für das folgende stets zugrundelegen, führen wir jetzt unseren Beweis durch *vollständige Induktion nach dem Rang des Kontinuums* K_1. Der Fall Rang $(K_1) = 1$ ist sofort erledigt; dann sind nämlich die Punkte von K_1 paarweise konjugiert (I; Nr. **3.** 2), also sämtlich zueinander äquivalent, so daß die Behauptung unmittelbar aus (Θ_a) folgt. Wir machen daher die *Induktionsvoraussetzung*, daß der Beweis bereits erbracht sei für alle Kontinua K_1 der Ränge $1, \ldots, r-1$, wobei $2 \leqq r \leqq n$ ist. Jetzt sei K_1 *ein Kontinuum, das im Falle* $r < n$ *den Rang* r, *im Falle* $r = n$ *einen beliebigen endlichen Rang* $\geqq n$ *oder überhaupt keinen endlichen Rang hat.* Wir beweisen den vorstehenden Satz für ein solches Kontinuum K_1. Beim Beweis unterscheiden wir drei (alle Möglichkeiten erschöpfende) Fälle.

3. 3. 4. **Fall I.** *In der* x *bzw.* y *enthaltenden Komponente* X *bzw.* Y *von* K_1' *existiert ein Punkt* x' *bzw.* y' *und dazu ein Teilsystem* $[a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n-1}}]$ *von* $[a_2, \ldots, a_n]$ *derart, daß* $A[x', y', a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n-1}}]$ *ist.* In diesem Fall ergibt sich die Behauptung $x \sim y$ folgendermaßen. Da $U[a_2, \ldots, a_n]$ gilt und da die Punkte x' und y' nicht in $L = L[a_2, \ldots, a_n]$ enthalten sind, so ist zufolge I; Nr. **2.** 1. 3 jedenfalls $[x', a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n-1}}] \approx [y', a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n-1}}]$. Zufolge Nr. **2.** 2. 1 ist also $x' \sim y'$. Da x mit x' und y mit y' in einer Komponente von $K_1' = K_1 - L[a_2, \ldots, a_n]$ liegt, so folgt aus (Θ_s) (Nr. **2.** 4), daß $x \sim x'$ und $y \sim y'$ ist. Wegen der Transitivität der Relation $\sim$ ist also $x \sim y$. Damit ist Fall I bereits erledigt.

Der weitere Beweis, in dessen Verlauf der Fall I stets ausgeschlossen sei, geht aus von der A-Zerlegung der Menge E aller Komponentenhäufungspunkte von K_1' in L. Um uns im folgenden bequemer ausdrücken zu können, bezeichnen wir einen Punkt z von K_1' als **zur** A**-Komponente** E^* **von** E bzw. **zum Simplex** $T = [a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}]$ **gehörig,** wenn mindestens ein Häufungspunkt der z enthaltenden Komponente Z von K_1' in E^* bzw. in $L(T)$ enthalten und bezüglich T allgemein ist. Da K_1 als zu L nicht fremd angenommen wurde (Nr. **3.** 3. 2), gehört jeder Punkt z von K_1' zu mindestens einer A-Komponente von E; denn einerseits besitzt die z enthaltende Komponente von $K_1' = K_1 - L$ mindestens einen in L, also in E enthaltenen Häufungspunkt, und andererseits ist E die Summe ihrer A-Komponenten (I; Nr. **5.** 4). Demgemäß sind für die zwei beliebig gegebenen Punkte x und y von K_1' nur die folgenden beiden Fälle möglich: x und y gehören zur selben A-Komponente von E (Fall II), x und y gehören zu zwei verschiedenen A-Komponenten von E (Fall III). Bevor wir diese Fälle erledigen, beweisen wir zwei Hilfssätze.

3. 3. 5. **Hilfssatz 1.** *Es seien* v *und* w *zwei Punkte von* K_1', *für welche der Fall* I *nicht vorliegt*; *es gehöre* v *zu einer Seite* T_v *von* $S = [a_2, \ldots, a_n]$ *mit der Ecke* a_2. *Dann ist*

$$\vartheta[w, a_2, a_3, \ldots, a_n] \sim \vartheta[w, v, a_3, \ldots, a_n].$$

Beweis. Die v enthaltende Komponente V von K_1' ist fremd zu $L_w = L[w, a_3, \ldots, a_n]$; denn für jeden Punkt v' aus $V \cdot L_w$ würde gelten $A[v', w, a_3, \ldots, a_n]$ entgegen der Vor-

aussetzung, daß für v und w der Fall I nicht vorliegt. Ist nun h_v ein in $L(T_v)$ enthaltener und bzgl. T_v allgemeiner Häufungspunkt von V (einen solchen gibt es, da v zu T_v gehört), so ist h_v nicht in L_w enthalten; denn einerseits folgt aus den soeben gemachten Voraussetzungen über h_v die Äquivalenz $[a_2, a_3, \ldots, a_n] \approx [h_v, a_3, \ldots, a_n]$; anderseits gilt $U[w, a_2, a_3, \ldots, a_n]$, da w nicht in $L = L[a_2, \ldots, a_n]$ liegt; also gilt $U[w, h_v, a_3, \ldots, a_n]$ (I; Nr. **2.** 2. VI). Damit ist bewiesen: Die zusammenhängende Menge $V + \{h_v\}$ ist fremd zu L_w. Also sind wegen (Θ_s) (Nr. **2.** 4) die Sekanten $\vartheta[w, h_v, a_3, \ldots, a_n]$ und $\vartheta[w, v, a_3, \ldots, a_n]$ in einer zusammenhängenden Teilmenge von $\vartheta(K)$ enthalten, nämlich in der Menge $\vartheta[\{w\}, V + \{h_v\}, \{a_3\}, \ldots, \{a_n\}]$, d. h. es ist $\vartheta[w, h_v, a_3, \ldots, a_n] \sim \vartheta[w, v, a_3, \ldots, a_n]$. Nun folgt aus der vorhin bewiesenen Äquivalenz $[a_2, a_3, \ldots, a_n] \approx [h_v, a_3, \ldots, a_n]$ und (Θ_a) (Nr. **2.** 1) die Gleichung $\vartheta[w, a_2, a_3, \ldots, a_n] = \vartheta[w, h_v, a_3, \ldots, a_n]$. Also ist $\vartheta[w, a_2, a_3, \ldots, a_n] \sim \vartheta[w, v, a_3, \ldots, a_n]$, w. z. b. w.

Hilfssatz 2. *Es seien v und w zwei Punkte von K_1', für welche der Fall* I *nicht vorliegt; die Punkte v und w mögen zu zwei Seiten T_v bzw. T_w von $S = [a_2, \ldots, a_n]$ mit mindestens einer gemeinsamen Ecke (etwa a_2) gehören. Dann gilt $v \sim w$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist $\vartheta[v, a_2, a_3, \ldots, a_n] \sim \vartheta[v, w, a_3, \ldots, a_n]$ und $\vartheta[w, a_2, \ldots, a_n] \sim \vartheta[w, v, a_3, \ldots, a_n]$. Wegen $\vartheta[v, w, a_3, \ldots, a_n] = \vartheta[w, v, a_3, \ldots, a_n]$ folgt hieraus die Behauptung $\vartheta[v, a_2, a_3, \ldots, a_n] \sim \vartheta[w, a_2, a_3, \ldots, a_n]$.

Wir erledigen nun die beiden schon oben (Nr. **3.** 3. 4) erwähnten, allein noch übrigen Fälle, von denen übrigens Fall III für $n = 2$ nicht auftritt.

3. 3. 6. **Fall II.** *Die Punkte x und y gehören zur gleichen A-Komponente von E.* Es sei $E^* = L_E(T^*)$ die fragliche A-Komponente von E, wobei T^* ein Teilsystem der inneren Basis $S_e = [a_2, \ldots, a_m]$ von E ist (I; Nr. **5.** 4). Die A-Komponente E^* ist identisch mit einer Zerspaltungskomponente von E bzgl. der inneren Basis S_e von E (I; Nr. **6.** 4. 1), also $L_E(T^*) = L_E(T_1) + \cdots + L_E(T_k)$, wobei die Simplexe $T_1, \ldots, T_k$ die sämtlichen bzgl. E maximal ausgezeichneten Seiten von T^* sind und eine zusammenhängende Simplexmenge bilden (I; Nr. **6.** 4). Indem wir die Simplexe $T_1, \ldots, T_k$ nötigenfalls umnumerieren, dürfen wir annehmen, daß ein Häufungspunkt h_x bzw. h_y der den Punkt x bzw. y enthaltenden Komponente X bzw. Y von K_1' in $L_E(T_1)$ bzw. $L_E(T_h)$ enthalten ist und die Simplexe $T_1, T_2, \ldots, T_h$ eine Kette bilden, daß also T_i und T_{i+1} mindestens eine gemeinsame Ecke haben ($i = 1, \ldots, h-1$). Da jedes Simplex T_i bzgl. E ausgezeichnet ist, enthält $L_E(T_i)$ einen bzgl. T_i allgemeinen Punkt von E; dieser ist als Punkt von E Häufungspunkt h_{z_i} einer Komponente Z_i von K_1'; es sei z_i ein beliebiger Punkt von Z_i. Die Häufungspunkte h_x, h_y sind in (echten oder unechten) Seitenmannigfaltigkeiten $L(T_1')$ bzw. $L(T_h')$ kleinsten Ranges von T_1 bzw. T_h enthalten und allgemein bzgl. T_1' bzw. T_h'. Als Seiten von T_1 bzw. T_h haben T_1' und T_h' mit T_1 bzw. T_h mindestens eine Ecke gemein. Zusammenfassend besteht also folgende Sachlage: Es liegen die Punkte $x, z_1, \ldots, z_h, y$ von K_1' vor; die sie enthaltenden Komponenten $X, Z_1, \ldots, Z_h, Y$ haben Häufungspunkte $h_x, h_{z_1}, \ldots, h_{z_h}, h_y$, welche enthalten sind in Mannigfaltigkeiten $L(T_1'), L(T_1), \ldots, L(T_h), L(T_h')$ und allgemein sind bzgl. $T_1', T_1, \ldots, T_h, T_h'$; je zwei aufeinander folgende der Simplexe $T_1', T_1, \ldots, T_h, T_h'$ haben mindestens eine Ecke gemein. Zum Beweis der Behauptung $x \sim y$ genügt also wegen der Transitivität der Relation $\sim$ der Beweis der Relationen $x \sim z_1, z_1 \sim z_2, \ldots, z_{h-1} \sim z_h, z_h \sim y$. Liegt nun für zwei aufeinander folgende der Komponenten $X, Z_1, \ldots, Z_h, Y$ der Fall I vor, so ist für die entsprechenden Punkte die Relation $\sim$ gesichert nach dem oben erledigten Fall I. Für die übrigen Paare aufeinander folgender Punkte $x, z_1, \ldots, z_h, y$ ergibt sich die Relation $\sim$ aus dem obigen Hilfssatz 2 (Nr. **3.** 3. 5).

3. 3. 7. **Fall III.** *Die Punkte x und y gehören zu verschiedenen A-Komponenten E^* bzw. E^{**} von E.* Es sei $E = E_1 + \cdots + E_s$ die direkte Zerlegung der Menge E in ihre A-Komponenten. Dann sind $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_s$ die A-Komponenten von $\bar{E}$ (Nr. **1.** 2. 9) und daher paarweise fremd (I; Nr. **5.** 3. I. 1; $\bar{E}$ enthält als Teilmenge von K keine singulären Punkte). Ist nun G_1 eine Summe von σ $(0 < \sigma < s)$ beliebigen der Mengen $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_s$ und G_2 die Summe der übrigen $s - \sigma$ der Mengen $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_s$, so sind also G_1 und G_2 abgeschlossene und fremde Teilmengen von $K_1 \cdot L$, und die Menge E der Komponentenhäufungspunkte von $K_1 - L$ in L ist in $G_1 + G_2$ enthalten. Daher enthält $K_1 - \bar{E}$ eine zu L fremde oder in L enthaltene Brücke, welche G_1 und G_2 verbindet (Zufolge des Brückensatzes, Nr. **5.** 1; man ersetze darin K und A durch K_1 und $K_1 \cdot L$). Hieraus folgt: durch eine geeignete Umnumerierung der A-Komponenten E_σ kann man folgendes erreichen: es ist $E^* = E_1$, $E^{**} = E_k$ und es existiert für jedes $i = 1, \ldots, k-1$ eine zu L fremde oder in L enthaltene Brücke $Z_i < K_1 - \bar{E}$, welche die A-Komponenten $\bar{E}_i$ und $\bar{E}_{i+1}$ miteinander verbindet. Zu jeder A-Komponente E_i gehört mindestens ein Punkt x_i von K_1' $(i = 2, \ldots, k-1)$, da E die Summe aller Komponentenhäufungspunkte von K_1' in L ist. Setzen wir noch $x = x_1$ und $y = x_k$, so genügt zum Beweis von $x \sim y$ der Beweis von $x_i \sim x_{i+1}$ für jedes $i = 1, \ldots, k-1$. Indem wir für x_i und x_{i+1} der Einfachheit halber wieder x bzw. y schreiben, können wir also folgende Voraussetzung machen: die Punkte x und y gehören zu zwei A-Komponenten E' bzw. E'', deren abgeschlossene Hüllen $\bar{E}'$ und $\bar{E}''$ verbunden sind durch eine zu L fremde oder in L enthaltene Brücke $Z < K_1 - \bar{E}$; die zusammenhängende Menge Z hat also Häufungspunkte h' bzw. h'', die in $\bar{E}'$ bzw. $\bar{E}''$ enthalten sind.

Die Mengen $\bar{E}'$ und $\bar{E}''$ sind als A-Komponenten von $\bar{E}$ Summen von Zerspaltungsmannigfaltigkeiten von $\bar{E}$ bzgl. der inneren Basis $S_e = [a_2, \ldots, a_m]$ von $\bar{E}$ (I; Nr. **6.** 4. 1). Also sind h' und h'' enthalten in Zerspaltungsmannigfaltigkeiten $L_{\bar{E}}(S_i) < \bar{E}'$ bzw. $L_{\bar{E}}(S_j) < \bar{E}''$ von $\bar{E}$ bzgl. S_e. Dabei sind S_i und S_j zwei Teilsysteme von S_e, die zueinander fremd sind, da $\bar{E}'$ und $\bar{E}''$ zueinander fremd sind. Indem wir die Punkte $a_2, \ldots, a_m$ umnumerieren, können wir also annehmen, daß das Simplex S_i bzw. S_j die Ecke a_2 bzw. a_3 hat und daß h' bzw. h'' nicht in $L[a_3, a_4, \ldots, a_n]$ bzw. nicht in $L[a_2, a_4, \ldots, a_n]$ liegt.

$L_E(S_i)$ und $L_E(S_j)$ sind Zerspaltungsmannigfaltigkeiten von E bzgl. der inneren Basis S_e von E (Nr. **1.** 2. 8). Daher sind S_i und S_j maximal ausgezeichnet bzgl. E (I; Nr. **6.** 3), d. h. in $L_E(S_i)$ und $L_E(S_j)$ sind bzgl. S_i bzw. S_j allgemeine Punkte $h_{x'}$ bzw. $h_{y'}$ von E enthalten. Nach Definition von E sind $h_{x'}$ und $h_{y'}$ Häufungspunkte von Komponenten X' bzw. Y' von K_1'. Sind x' und y' zwei beliebige Punkte von X' bzw. Y', so gehören x und x' bzw. y und y' zu der gleichen A-Komponente E' bzw. E'' von E. Nach dem bereits erledigten Fall II gilt also $x \sim x'$ und $y \sim y'$. Zum Beweis von $x \sim y$ genügt also der Beweis von $x' \sim y'$. Indem wir x statt x' und y statt y' schreiben, dürfen wir also weiter annehmen: die Punkte x und y gehören zu S_i bzw. S_j.

Insgesamt haben wir also folgende Sachlage: **a)** S_i und S_j sind (fremde) Teilsysteme von $S = [a_2, \ldots, a_n]$, welche die Punkte a_2 bzw. a_3 enthalten; **b)** die die Punkte x bzw. y enthaltenden Komponenten X bzw. Y haben Häufungspunkte h_x bzw. h_y, die in $L_E(S_i)$ bzw. $L_E(S_j)$ enthalten und bzgl. S_i bzw. S_j allgemein sind; **c)** es existiert eine zu L fremde oder in L enthaltene, zusammenhängende Teilmenge Z von $K_1 - \bar{E}$ mit Häufungspunkten h' bzw. h'' in $L_{\bar{E}}(S_i)$ bzw. $L_{\bar{E}}(S_j)$; **d)** der Punkt h' bzw. h'' liegt nicht in $L[a_3, a_4, \ldots, a_n]$ bzw. nicht in $L[a_2, a_4, \ldots, a_n]$.

Es sei nun *erstens* die Menge Z fremd zu L. Dann ist also Z eine zusammenhängende Teilmenge von $K_1' = K_1 - L < K_1 - \bar{E}$, da aus $E < L$ folgt $\bar{E} < L$ (Nr. **1.** 1. (H)), mithin Z eine Teilmenge einer Komponente Z' von K_1'. Es sei z' ein beliebiger Punkt von Z'. Die Punkte $h' \varepsilon L$ und $h'' \varepsilon L$ sind Häufungspunkte von Z' und daher in E enthalten, also wegen **c**) in $L_E(S_i)$ bzw. $L_E(S_j)$ enthalten. Bezeichnen wir (wie oben) mit E' bzw. E'' die $L_E(S_i)$ bzw. $L_E(S_j)$ enthaltende A-Komponente von E, so gehören also die Punkte x und z' zu E', die Punkte z' und y zu E''. Nach dem bereits erledigten Fall I bzw. II ist mithin $x \sim z'$ und $z' \sim y$, also $x \sim y$.

Es sei *zweitens* Z in L enthalten. Zufolge **a**) gilt $L_{\bar{E}}(S_i) < L[a_2, a_4, \ldots, a_n]$. Da ferner h' zufolge **c**) in $L_{\bar{E}}(S_i)$ liegt, so gilt $h' \varepsilon L[a_2, a_4, \ldots, a_n]$. Zufolge **d**) liegt h' nicht in $L[a_3, a_4, \ldots, a_n]$, also auch nicht in $L[a_4, \ldots, a_n]$. Mithin gilt $[a_2, a_4, \ldots, a_n] \approx [h', a_4, \ldots, a_n]$ und, wegen (Θ_a) (Nr. **2.** 1), daher $\vartheta[x, y, a_2, a_4, \ldots, a_n] = \vartheta[x, y, h' a_4, \ldots, a_n]$. Entsprechend folgt $\vartheta[x, y, a_3, a_4, \ldots, a_n] = \vartheta[x, y, h'', a_4, \ldots, a_n]$. Aus **a**) und **b**) folgen die Relationen $\vartheta[x, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n] \sim \vartheta[x, a_2, y, a_4, \ldots, a_n]$ und $\vartheta[y, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n] \sim \vartheta[y, x, a_3, a_4, \ldots, a_n]$. Insgesamt haben wir also die Relationen $\vartheta[x, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n] \sim \vartheta[h', x, y, a_4, \ldots, a_n]$ und $\vartheta[y, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n] \sim \vartheta[h'', x, y, a_4, \ldots, a_n]$. Wir haben also nur noch die Relation $\vartheta[h', x, y, a_4, \ldots, a_n] \sim \vartheta[h'', x, y, a_4, \ldots, a_n]$ zu beweisen.

Zum Beweis dieser Relation verwenden wir unsere Induktionsannahme (Nr. **3.** 3. 3), in welcher wir die Kontinua $K_1, \ldots, K_n$ durch die Kontinua $\bar{Z}, \{x\}, \{y\}, \{a_4\}, \ldots, \{a_n\}$ und die Punkte $x, y, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ durch die Punkte $h', h'', x, y, a_4, \ldots, a_n$ ersetzen. Diese Ersetzung ist erlaubt, denn es gilt folgendes: *Erstens* ist das System $[x, y, a_4, \ldots, a_n]$ unabhängig, da Fall I nicht vorliegt. *Zweitens* sind die Punkte h' und h'' von $\bar{Z}$ nicht in $L[x, y, a_4, \ldots, a_n]$ enthalten; für h' folgt dies so: Zunächst gilt $U[x, y, a_2, a_4, \ldots, a_n]$, da Fall I nicht vorliegt; h' liegt nach **c**) in $L_{\bar{E}}(S_i)$, also, da S_i wegen **a**) ein Teilsystem von $[a_2, a_4, \ldots, a_n]$ ist und daher $L_{\bar{E}}(S_i) < L[a_2, a_4, \ldots, a_n]$ gilt, h' in $L[a_2, a_4, \ldots, a_n]$; aus $h' \varepsilon L[x, y, a_4, \ldots, a_n]$ würde nun $h' \varepsilon L[x, y, a_4, \ldots, a_n] \cdot L[a_2, a_4, \ldots, a_n] = L[a_4, \ldots, a_n]$ folgen (I; Nr. **2.** 2. VII), im Widerspruch zu **d**); analog schließt man für h''. *Drittens* gilt $\mathrm{Rang}(\bar{Z}) < \mathrm{Rang}(K_1)$, falls K_1 einen endlichen Rang $r < n$ hat, und $\mathrm{Rang}(\bar{Z}) \leqq n - 1$, falls K_1 einen endlichen Rang $\geqq n$ oder überhaupt keinen endlichen Rang hat; hat nämlich K_1 einen endlichen Rang, so ist $\mathrm{Rang}(K_1 \cdot L) < \mathrm{Rang}(K_1)$, da K_1 nicht in der A-Mannigfaltigkeit L und daher auch nicht in $L(K_1 \cdot L) < L$ enthalten ist, und infolgedessen ist wegen $\bar{Z} < K_1 \cdot L$ weiter $\mathrm{Rang}(\bar{Z}) < \mathrm{Rang}(K_1)$; andrerseits ist auf jeden Fall (einerlei, ob K_1 einen endlichen Rang hat oder nicht) $\mathrm{Rang}(\bar{Z}) \leqq n - 1$, da

$$\bar{Z} < L = L[a_2, \ldots, a_n]$$

gilt und L den Rang $n - 1$ hat.

Wir dürfen also die Induktionsvoraussetzung auf die Kontinua $\bar{Z}, \{x\}, \{y\}, \{a_4\}, \ldots, \{a_n\}$ und die Punkte $h', h'', x, y, a_4, \ldots, a_n$ anwenden. Ihr zufolge sind die Sekanten $\vartheta[h', x, y, a_4, \ldots, a_n]$ und $\vartheta[h'', x, y, a_4, \ldots, a_n]$ enthalten in einer zusammenhängenden Teilmenge von $\vartheta(\bar{Z} + \{x\} + \{y\} + \{a_4\} + \cdots + \{a_n\})$. Diese letztere Menge ist aber wegen $\bar{Z} + \{x\} + \{y\} + \{a_4\} + \cdots + \{a_n\} < K$ eine Teilmenge von $\vartheta(K)$. Also gilt $\vartheta[h', x, y, a_4, \ldots, a_n] \sim \vartheta[h'', x, y, a_4, \ldots, a_n]$, womit der Beweis beendet ist.

3. 4. Es seien die Voraussetzungen der Nr. **3.** 1 erfüllt. Dabei sei Θ speziell ein *metrischer, kompakter* Raum. Wir bezeichnen einen Punkt ϑ aus Θ als eine **Grenzsekante** einer Menge N aus $[H; M; A]$, wenn ϑ Häufungselement der Menge $\vartheta(N)$ aller von N aufgespannten Sekanten ist. Dann gilt der

Satz. *Es sei K ein Kontinuum aus $[H; M; A]$, das fremd ist zur Menge L^0 der singulären Punkte aus $[H; M; A]$. Dann ist die Menge aller Sekanten und Grenzsekanten von K ein Kontinuum.*

Beweis. Nach Satz Nr. **3.** 2 ist die Menge $\vartheta(K)$ aller von K aufgespannten Sekanten zusammenhängend. Also ist die Menge $\overline{\vartheta(K)}$ aller Sekanten und Grenzsekanten von K ein Kontinuum.

§ 4. Über den Zusammenhang des Paratingents eines Kontinuums.

4. 1. Es seien die Voraussetzungen der Nr. **3.** 1 erfüllt. Dabei sei Θ etwa ein metrischer, kompakter Raum. Ist N eine Menge des Raumes $[H; M; A]$ und x ein gewöhnlicher Punkt von $\overline{N}$, so bezeichnen wir als das (*lokale*) **Paratingent** [23]) von N **im Punkte** x die Menge aller Elemente ϑ des Raumes Θ mit folgender Eigenschaft: ϑ ist der Limes einer Folge von Sekanten $\vartheta[x_1^i, \ldots, x_n^i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wobei die $[x_1^i, \ldots, x_n^i]$ unabhängige Punktsysteme aus N sind, welche gegen x konvergieren: $\lim\limits_{i\to\infty} x_j^i = x$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Das Paratingent von N in x ist dann und nur dann nicht leer, wenn der (lokale) Rang von N in x nicht kleiner als n ist, d. h. wenn jede Umgebung von x in N mindestens den Rang n besitzt.

Als (*globales*) **Paratingent einer Menge** N bezeichnen wir die Vereinigung aller lokalen Paratingents von N.

Beispiel eines Paratingents: Im euklidischen E_2 bedeute $U[x_1, x_2, x_3]$, daß die x_1, x_2, x_3 paarweise verschieden sind; ferner sei $\vartheta[x_1, x_2, x_3]$ erklärt als Kreis (evtl. Gerade) durch x_1, x_2, x_3 und Θ als Menge der Kreise in E_2 von beliebigem Radius (einschließlich Radius 0 und ∞). In diesem Falle ist das lokale Paratingent im oben definierten Sinne nichts anderes als das zyklische Paratingent im Sinne von Herrn Bouligand [24]).

Aus der Kontinuität des lokalen Paratingents einer zusammenhängenden Menge folgt die des globalen; denn [25]) das lokale Paratingent im Punkte x ist [23]) eine oberhalb stetige Funktion von x.

Es erheben sich damit folgende

Probleme: Ist für eine zusammenhängende oder lokal zusammenhängende (vgl. Nr. **4.** 3.) Menge K aus $[H; M; A]$ ohne singuläre Punkte 1. das globale Paratingent, 2. das lokale Paratingent in einem Punkt von $\overline{K}$ ein Kontinuum?

4. 2. Im positiven Sinne ist das 2. Problem gelöst in folgenden Fällen: Es ist $[H; M; A]$ der euklidische E_m mit einer wie üblich erklärten Abhängigkeit $A[x_1, \ldots, x_\varkappa]$, $\varkappa = 1, \ldots, k$. Es ist K ein Kontinuum. Für $k = 2$ und beliebiges $m \geqq 2$ ist $\vartheta[x_1, x_2]$ die Richtung der Verbindungsgeraden der Punkte x_1, x_2; für $k = 3$ und $m = 3$ ist $\vartheta[x_1, x_2, x_3]$ die Richtung der durch x_1, x_2, x_3 aufgespannten Ebene [26]). Dies verallgemeinert Herr Torrance (vgl. den Zusatz) für $k \leqq 3$, wobei K für $k = 2$ lokal zusammenhängend oder ein Kontinuum, für $k = 3$ lokal zusammenhängend ist [27]). Schließlich weiß man: Das lokale Paratingent eines mehr als einen Punkt enthaltenden Kontinuums K (in einem metrischen Raume) ist ein Kontinuum, wenn die Abhängig-

---

[23]) Entsprechend der von Herrn Bouligand eingeführten Begriffsbildung und Bezeichnung; vgl. z. B. G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932.

[24]) Vgl. G. Bouligand, Sur la topologie restreinte du second ordre, Bull. Soc. Math. **60** (1932), S. 237.

[25]) Vgl. z. B. H. Hahn, Reelle Funktionen, Leipzig 1932, S. 149 und 151, Nr. 21. 4. 2.

[26]) Vgl. die in I., Fußnoten [1]) bis [5]) zitierten Arbeiten von Bouligand, Mirguet, Rabaté.

[27]) Vgl. die in I., Fußnote [6]), zitierte Arbeit.

keit so erklärt wird: $U[x_1, \ldots, x_n]$ ist gleichbedeutend damit, daß die $x_1, \ldots, x_n$ sämtlich verschieden sind [28]).

Zusatz. Die Sätze von Torrance (kurz T.) betr. lokales Paratingent bei lokal zusammenhängendem K ordnen sich in unseren Satz (Nr. **4.** 3.) ein:

I. Aus den von T. vorausgesetzten Axiomen 1 (T., S. 193) und 2 (T. S. 202) folgt, daß das Axiom 1 von R. L. Moore[29]) erfüllt ist. Hieraus und aus Axiom 2 von T. folgt aber leicht [30]), daß die von T. als Grundraum H betrachtete Punktmenge S ein kompakter Hausdorffscher Raum mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, also[31]) metrisierbar ist.

II. Durch zwei verschiedene Punkte P und Q von S ist genau eine „Gerade" („line") $\overline{PQ}$ im Sinne von T. bestimmt (T., S. 195, Zeile 3 und 2 *vor* Remark 4).

IIa. Die Geraden bilden einen, dem Axiom 1 von Moore genügenden (T., S. 200, Theorem 1), kompakten (T., S. 202, Th. 3), also metrisierbaren Raum (vgl. I.). (Die Topologie des Geradenraumes ist durch die von S bestimmt). Der Geradenraum ist somit insbesondere ein Zusammenhangsraum. Ferner ist $\overline{PQ}$ stetige Funktion von P und Q, d. h.

$$\overline{P_0Q_0} = \lim_{n\to\infty} \overline{P_nQ_n}, \text{ wenn } P_n \to P_0,\ Q_n \to Q_0,\ P_n \neq Q_n,\ P_0 \neq Q_0$$

(folgt aus T., S. 199, Lemma 6).

III. Drei Punkte P, Q, R von S heißen nichtkollinear, wenn keine Gerade existiert, die alle drei Punkte enthält (T., S. 196). Durch drei nicht-kollineare Punkte P, Q, R von S ist genau eine „Ebene" („plane") $\overline{PQR}$ bestimmt (T., S. 196, Definition 4a und S. 197, Zeile 2 und 1 vor Remark 4a).

IIIa. Die Ebenen bilden einen kompakten, metrisierbaren Raum (T., S. 201, Th. 1a; S. 203, Th. 3a) und sind stetige Funktionen von drei sie aufspannenden Punkten (T., S. 199, Lemma 6a). — Setzt man also fest: $A[x_1, x_2] \sim (x_1 = x_2)$, $A[x_1, x_2, x_3] \sim (x_1, x_2, x_3$ sind kollinear), $A[x_1, x_2, x_3, x_4] \sim (x_1, x_2, x_3, x_4$ sind komplanar), ferner $\vartheta[x_1, x_2] =$ Gerade durch x_1 und x_2 oder aber $\vartheta[x_1, x_2, x_3] =$ Ebene durch x_1, x_2, x_3, so gelten das Hüllenaxiom (Nr. **1.** 1), die Äquivalenzbedingung (Nr. **2.** 1, sogar stärker, vgl. Nr. **2.** 2. 1, Zusatz) sowie die partielle Stetigkeit von ϑ (Nr. **2.** 4), und überdies ist der ϑ-Raum Zusammenhangsraum. Wir bemerken noch, daß bei T. aus der Kompaktheit von S diejenige des Raums der Geraden und des der Ebenen folgt (T., S. 202, Theorem 3 und S. 203, Theorem 3a).

4. 3. Das 2. Problem in Nr. **4.** 1. besitzt eine positive Lösung jedenfalls dann, wenn das Kontinuum K lokal zusammenhängend ist, oder allgemeiner, wenn K eine im betrachteten Punkte $x \varepsilon \overline{K}$ lokal zusammenhängende Menge mit kompakter abgeschlossener Hülle ist; dabei heißt *lokal zusammenhängend*: In einer beliebigen Umgebung[32]) U in K von x ist eine zusammenhängende Umgebung V in K von x enthalten. Es gilt nämlich, *falls Θ ein metrischer, kompakter Raum ist*, der

Satz. *Es sei N eine, zur Menge L^0 der singulären Punkte fremde Menge des Raumes $[H; M; A]$ mit kompakter abgeschlossener Hülle. Ist dann N im Punkte $x \varepsilon \overline{N}$ lokal zusammenhängend, so ist das (lokale) Paratingent von N in x ein Kontinuum.*

---

[28]) C. Pauc, Ensemble des systèmes finis de points d'un continu, C. R. Paris **204** (1937), 389ff. sowie C. Pauc, Topologie des contingents et paratingents, Rend. Circolo mat. Palermo **62** (1939), 137ff..

[29]) R. L. Moore, Foundations of point set theory, Colloquium Publications of the American Math. Society **13**, New York 1932.

[30]) Unter Benützung von Moore, a. a. O. [28]), Theorem 22, S. 15.

[31]) Vgl. z. B. Alexandroff-Hopf, a. a. O. [15]), S. 89, Satz VIII″.

[32]) Unter einer Umgebung $\mathfrak{U}$ in K von $x \varepsilon \overline{K}$ verstehen wir eine in K offene Menge, für welche $\mathfrak{U} + \{x\}$ in $K + \{x\}$ offen ist.

Beweis. Da in der Behauptung dieses Satzes nur die Punkte von $\overline{N}$ eine Rolle spielen, können wir, indem wir alle nicht in $\overline{N}$ enthaltenen Punkte von $[H; M; A]$ tilgen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $[H; M; A] = [\overline{N}; M; A]$ ist (vgl. I; Nr. **3.** 3).

Nun sei x ein beliebiger Punkt von $\overline{N}$. Wir setzen $N = U_0$; dann sei V_0 eine zusammenhängende Umgebung von x in N; auch die im folgenden auftretenden Umgebungen sind immer als in N genommen zu verstehen. Wir machen die Induktionsvoraussetzung, daß für eine nichtnegative ganze Zahl k bereits eine zusammenhängende Umgebung V_k von x definiert ist. Ist nun U_k diejenige Umgebung von x, die aus allen Punkten mit Abständen $< (k+1)^{-1}$ von x besteht, so ist $U_k \cdot V_k$ eine Umgebung von x mit einem Durchmesser $\leqq 2(k+1)^{-1}$. Wegen des lokalen Zusammenhanges von N existiert eine zusammenhängende Umgebung $V_{k+1} < U_k \cdot V_k$ von x. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge $V_1, V_2, \ldots$ von zusammenhängenden Umgebungen des Punktes x mit folgenden Eigenschaften: erstens gilt $V_{k+1} < V_k$ für $k = 1, 2, \ldots$; zweitens ist der Durchschnitt $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{V}_k = \{x\}$, da V_k einen Durchmesser $\leqq 2k^{-1}$ hat und x enthält.

Die abgeschlossene Hülle $\overline{V}_k$ ist ein Kontinuum, da V_k zusammenhängend und $\overline{N}$ kompakt ist. Also ist nach dem Satz der Nr. **3.** 4, die Menge $\overline{\vartheta(\overline{V}_k)}$ aller Sekanten und Grenzsekanten von $\overline{V}_k$ ein Kontinuum. Wegen $\overline{V}_{k+1} < \overline{V}_k$ gilt $\overline{\vartheta(\overline{V}_{k+1})} < \overline{\vartheta(\overline{V}_k)}$. Also ist der Durchschnitt $\boldsymbol{\Pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{\vartheta(\overline{V}_k)}$ ein Kontinuum. Da $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{V}_k = \{x\}$ ist und V_k eine Umgebung von x mit einem Durchmesser $\leqq 2k^{-1}$ ist, so ist $\boldsymbol{\Pi}$ das Paratingent von N in x. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 5. Anhang (Brückensatz).

5. 1. Ist R ein metrischer Raum und A eine abgeschlossene Teilmenge von R, so bezeichnen wir als einen **Komponentenhäufungspunkt** von $R - A$ in A jeden Punkt von A, der Häufungspunkt einer Komponente von $R - A$ ist (vgl. Nr. **3.** 3. 2).

Brückensatz. *Vor. Es sei K ein metrisches Kontinuum, A eine abgeschlossene Teilmenge von K und E die Menge aller Komponentenhäufungspunkte von $K - A$ in A; schließlich seien G_1 und G_2 zwei fremde, abgeschlossene Teilmengen von A mit $E < G_1 + G_2$.*

Beh. Die Menge $K - (G_1 + G_2)$ enthält eine entweder zu A fremde oder in A enthaltene, G_1 und G_2 verbindende **Brücke**, d. h. eine zusammenhängende Teilmenge Z, deren abgeschlossene Hülle mit G_1 und G_2 nichtleere Durchschnitte hat.

Setzt man hierin speziell $A = G_1 + G_2$, so geht der Brückensatz über in folgenden Satz:

Spezieller Brückensatz [33]. *Im metrischen Kontinuum K seien zwei fremde, abgeschlossene Teilmengen G_1 und G_2 gegeben. Dann enthält die Menge $K - (G_1 + G_2)$ eine G_1 und G_2 verbindende Brücke.*

Zusatz. Eine unmittelbare Folgerung aus dem speziellen Brückensatz ist der

Randsatz von Janiszewski. *Ist K ein metrisches Kontinuum und U eine in K offene, echte Teilmenge von K, so ist die abgeschlossene Hülle jeder Komponente von U zu $K - U$ nicht fremd.*

[33]) Unter Zugrundelegung seiner Axiome 0 und 1 beweist Moore (a. a. O. [28]), S. 21 und 22) folgendes: *Theorem* 34: Sind H und K fremde abgeschlossene Teile eines (kompakten metrisierbaren) Kontinuums M, so existiert ein Teilkontinuum von M, welches irreduzibel ist zwischen H und K. *Theorem* 37: Sind H und K fremde abgeschlossene Mengen und ist das Kontinuum M irreduzibel zwischen H und K, so ist $M - M \cdot (H + K)$ zusammenhängend. — Aus beiden Sätzen folgt unmittelbar der spezielle Brückensatz.

Ist nämlich K' eine beliebige Komponente von U, so sei G_1 eine einpunktige Teilmenge von K' und $G_2 = K - U$. Nach dem speziellen Brückensatz enthält $K - (G_1 + G_2)$ eine G_1 und G_2 verbindende Brücke Z. Da Z eine zusammenhängende Teilmenge von U und G_1 eine Teilmenge von $\overline{Z}$ ist, ist $Z + G_1$ eine zusammenhängende Teilmenge von U, also, da sie zu K' nicht fremd ist, eine Teilmenge von K'. Mit $\overline{Z}$ ist daher auch $\overline{K}'$ zu $G_2 = K - U$ nicht fremd.

5. 2. Wir beginnen mit dem **Beweis des speziellen Brückensatzes.**

Die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ einer Teilmenge von K, zusammenhängend und zu G_1 und G_2 nicht fremd zu sein, kommt dem Durchschnitt einer monoton fallenden Folge abgeschlossener Teilmengen von K zu, wenn jede Menge dieser Folge die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ hat. Also enthält K eine abgeschlossene Teilmenge T, welche die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt und in bezug auf $\mathfrak{E}$ irreduzibel ist; es ist also T ein zu G_1 und G_2 nicht fremdes Teilkontinuum von K, dessen echte Teilkontinua entweder zu G_1 oder zu G_2 oder zu beiden fremd sind.

Wir setzen $Z = T - (G_1 + G_2)$ und behaupten, daß Z die verlangten Eigenschaften besitzt.

Wir zeigen *erstens*: Z ist zusammenhängend. Nehmen wir an, Z sei nicht zusammenhängend, also Summe zweier nichtleerer, fremder, in Z abgeschlossener Teilmengen Z_1 und Z_2. Wir werden hieraus die Existenz eines echten Teilkontinuums von T herleiten, das zu G_1 und G_2 nicht fremd ist, im Widerspruch zur Definition von T. Zu diesem Zweck bezeichnen wir für jede natürliche Zahl n mit U_n bzw. V_n die Menge aller Punkte von K, die von G_1 bzw. G_2 Abstände $< n^{-1}$ haben. Bei hinreichend großem n_0 sind für alle $n \geqq n_0$ die in K offenen Mengen U_n und V_n fremd und die kompakten Mengen $Z_1 - (U_n + V_n)$ und $Z_2 - (U_n + V_n)$ nicht leer. Für $n \geqq n_0$ sei weiter d_n eine so kleine positive Zahl, daß $2d_n$ kleiner ist als n^{-1} und als der (positive) Abstand der Mengen $Z_1 - (U_n + V_n)$ und $Z_2 - (U_n + V_n)$ voneinander. Nun enthält das Kontinuum T eine d_n-Kette S_n (d. h. eine endliche geordnete Menge von Punkten, von denen je zwei aufeinander folgende einen Abstand $< d_n$ haben), deren erster bzw. letzter Punkt in G_1 bzw. G_2 enthalten ist. Diese Kette S_n enthält eine d_n-Kette T_n, die nur aus Punkten von $T - (\overline{U}_n + \overline{V}_n)$ besteht, deren erster bzw. letzter von $\overline{U}_n$ bzw. $\overline{V}_n$ einen Abstand $< d_n$ besitzt; eine solche Kette T_n wird z. B. gebildet von denjenigen Punkten von S_n, welche dem letzten in $\overline{U}_n$ enthaltenen Punkt P von S_n folgen und dem ersten auf P folgenden, in $\overline{V}_n$ enthaltenen Punkt von S_n vorangehen. Da der Abstand je zweier aufeinander folgender Punkte von T_n kleiner ist als d_n und d_n kleiner ist als der Abstand der Mengen $Z_1 - (\overline{U}_n + \overline{V}_n)$ und $Z_2 - (\overline{U}_n + \overline{V}_n)$ voneinander, ist T_n wegen $T_n < T - (\overline{U}_n + \overline{V}_n) = Z_1 + Z_2 - (\overline{U}_n + \overline{V}_n)$ entweder in $Z_1 - (\overline{U}_n + \overline{V}_n)$ oder in $Z_2 - (\overline{U}_n + \overline{V}_n)$ enthalten. Also enthält[34]) die Mengenfolge $T_1, T_2, \ldots$ eine konvergente Teilfolge $T_{n_1}, T_{n_2}, \ldots$, deren Limes wir mit T' bezeichnen, wobei jedes T_{n_k} etwa in $Z_1 - (\overline{U}_{n_k} + \overline{V}_{n_k})$ enthalten ist und $n_k \geqq k$ gilt. Setzen wir $T_{n_k} = T'_n$, $U_{n_k} = U'_k$ und $V_{n_k} = V'_k$, so gilt wegen $d_n \leqq n^{-1}$ folgendes: a) U'_k bzw. V'_k ist eine Umgebung von G_1 bzw. G_2, bestehend aus Punkten, die von G_1 bzw. G_2 Abstände $\leqq k^{-1}$ haben; b) T'_k ist eine k^{-1}-Kette $< T$; c) T'_k hat von $\overline{U}'_k$ und $\overline{V}'_k$ Abstände $\leqq k^{-1}$; d) es gilt $T'_k < Z_1 - (\overline{U}'_k + \overline{V}'_k)$; e) die Folge $T'_1, T'_2, \ldots$ ist konvergent; ihr Limes ist T'. Wegen b) ist T' ein Teilkontinuum von T. Wegen d) und der Abgeschlossenheit von $Z_1 - (U'_k + V'_k)$ gilt $T' - (\overline{U}'_k + \overline{V}'_k) < Z_1 - (\overline{U}'_k + \overline{V}'_k)$ für jedes $k = 1, 2, \ldots$.

---

[34]) Vgl. z. B. Alexandroff-Hopf, a. a. O. [15]), S. 115.

Hieraus folgt, da wegen a) gilt $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{U}_k' = G_1$ und $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{V}_k' = G_2$, daß $T' - (G_1 + G_2) < Z_1$, also T' eine echte Teilmenge von T ist. Schließlich folgt aus a) und c), daß T' mit G_1 und G_2 nichtleere Durchschnitte hat. Also ist T' ein echtes, zu G_1 und G_2 nicht fremdes Teilkontinuum von T, im Widerspruch zur Definition von T.

Wir beweisen *zweitens*: $\overline{Z}$ hat mit G_1 und G_2 nichtleere Durchschnitte. Hierzu genügt es, zu zeigen, daß $\overline{Z} = T$ ist. Da T ein zu G_1 und G_2 nicht fremdes Kontinuum ist, enthält T eine n^{-1}-Kette T_n, deren erster bzw. letzter Punkt von G_1 bzw. G_2 einen Abstand $< n^{-1}$ hat und deren sämtliche Punkte in $Z = T - (G_1 + G_2)$ enthalten sind. Es sei $T_{n_1}, T_{n_2}, \ldots$ eine konvergente Teilfolge der Folge $T_1, T_2, \ldots$. Dann ist der Limes T' dieser Folge ein Teilkontinuum von $\overline{Z}$ und T, das zu G_1 und G_2 nicht fremd ist. Wegen der Irreduzibilität von T bzgl. $\mathfrak{E}$ folgt hieraus $T' = T$ und hieraus wegen $T' < \overline{Z} < T$ die behauptete Gleichung $\overline{Z} = T$.

5. 3. Beweis des Brückensatzes. Es sei F_i die Summe aller zu G_i nicht fremden Komponenten von A $(i = 1, 2)$.

Erstens ist F_i in K abgeschlossen $(i = 1, 2)$. Zeigen wir dies etwa für $i = 1$. Es genügt zu beweisen: Ist der Punkt P von $K - G_1$ Limes einer Folge von Punkten $P^1, P^2, \ldots$ aus $F_1 - G_1$, so gilt $P \varepsilon F_1$. Es sei A^j die den Punkt P^j enthaltende (zu G_1 nichtfremde) Komponente von A. Indem wir zu einer konvergenten Teilfolge übergehen[34]), können wir die Folge der Mengen $A^1, A^2, \ldots$ sofort als konvergent annehmen. Der Limes A' dieser Folge ist ein zu G_1 nicht fremdes Kontinuum $< A$, da jedes A^j ein zu G_1 nicht fremdes Kontinuum $< A$ ist. Also ist A' in einer zu A nicht fremden Komponente von A enthalten und also eine Teilmenge von F_1. Da P in A' enthalten ist, gilt also $P \varepsilon F_1$.

Zweitens gilt $A = F_1 + F_2$. Nach Definition der F_i gilt zunächst $F_1 + F_2 < A$. Nehmen wir nun an, es gelte nicht auch $A < F_1 + F_2$. Dann existiert also eine Komponente B von A, die zu G_1 *und* G_2 fremd ist. Die kompakten Mengen B und $G_1 + G_2$ haben daher einen positiven Abstand voneinander. Mithin existiert eine (in K) offene Teilmenge U von K, welche B enthält und von $G_1 + G_2$ einen positiven Abstand hat. Nach dem speziellen Brückensatz, angewandt auf B und $K - U$ statt G_1 und G_2, enthält die Menge $K - (B + (K - U)) = U - B$ eine zusammenhängende Menge Y mit $\overline{Y} \cdot B \neq 0$ und $\overline{Y} \cdot (K - U) \neq 0$. *Einerseits* ist $\overline{Y}$ in A enthalten. Andernfalls nämlich würde, da das Kontinuum $\overline{Y}$ zu B, also zu A nicht fremd ist, die abgeschlossene Hülle jeder Komponente von $\overline{Y} - A$ mit A einen nichtleeren Durchschnitt haben. Dieser Durchschnitt würde aber aus lauter Komponentenhäufungspunkten von $K - A$ in A bestehen, also eine Teilmenge von $E < G_1 + G_2$ sein, im Widerspruch dazu, daß $\overline{Y} < \overline{U}$ gilt und $\overline{U}$ zu $G_1 + G_2$ fremd ist. *Andrerseits* folgt aus $\overline{Y} < A$ ein Widerspruch. Denn mit $\overline{Y}$ und B ist wegen $\overline{Y} \cdot B \neq 0$ auch $\overline{Y} + B$ zusammenhängend und, da $B < U$, hingegen nicht $\overline{Y} < U$ gilt, $\overline{Y} + B$ eine echte Obermenge von B. Wäre also $\overline{Y} < A$, so wäre B keine Komponente von A. — Mithin gilt $A < F_1 + F_2$.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: F_1 und F_2 sind fremd zueinander oder nicht.

1. Fall: F_1 und F_2 sind fremd zueinander. Nach dem speziellen Brückensatz enthält $K - (F_1 + F_2) = K - A < K - (G_1 + G_2)$ eine zusammenhängende Menge Z, deren abgeschlossene Hülle $\overline{Z}$ mit F_1 und F_2 nichtleere Durchschnitte D_1 bzw. D_2 hat. Wegen $Z < K - A$ ist jeder Punkt von $D_1 + D_2$ ein Komponentenhäufungspunkt von

$K - A$ in A, also $D_1 + D_2$ eine Teilmenge von E. Wegen $E < G_1 + G_2$ folgt hieraus $D_1 + D_2 < G_1 + G_2$. Da aber F_1 und F_2 fremd zueinander sind, da ferner $G_1 < F_1$, $G_2 < F_2$, $D_1 < F_1$ und $D_2 < F_2$ gilt, so ergibt sich $D_1 < G_1$ und $D_2 < G_2$, d. h. die abgeschlossene Hülle von Z ist zu G_1 und G_2 nicht fremd. Zugleich ist Z fremd zu A.

2. Fall: F_1 und F_2 sind nicht fremd zueinander. Nach Definition von F_1 und F_2 existiert also eine zu G_1 und G_2 nicht fremde Komponente A' von A. Nach dem speziellen Brückensatz, angewandt auf A', $A'G_1$, $A'G_2$ statt K, G_1, G_2, enthält die Menge $A' - (G_1 + G_2)$ eine zusammenhängende Teilmenge Z, deren abgeschlossene Hülle zu G_1 und G_2 nicht fremd ist. Wegen $A' < A$ ist Z in A enthalten.

§ 6. Verallgemeinerungen.

6.1. In Nr. **3.**3.2 haben wir festgestellt, daß für den Beweis des Satzes Nr. **3.**2.1 und damit auch des Satzes Nr. **3.**2 die Voraussetzungen über den ganzen Raum $[H; T; A]$ nicht benötigt werden, daß es vielmehr genügt, sich auf K als Raum zu beschränken. Die genannten beiden Sätze bleiben also richtig, wenn man nur folgendes voraussetzt: K bzw. $K = K_1 + \cdots + K_n$ sind metrisierbare, kompakte Abhängigkeitsräume; K bzw. jedes K_ν ist zusammenhängend; jedem unabhängigen Punkt-n-Tupel $[x_1, \ldots, x_n]$ aus K ist ein Element ϑ eines Zusammenhangsraumes Θ als Sekante eindeutig und partiell stetig zugeordnet.

6.2. Die Metrisierbarkeit und Kompaktheit von K sind im Beweis der Sätze nur insofern benutzt worden, als wir mehrfach den Randsatz von Janiszewski und einmal den Brückensatz für K_1 und $K_1 \cdot L$ angewandt haben. Im übrigen wurde in Gestalt der Anwendung der Paragraphen 1 und 2 nur benutzt, daß K ein topologischer Abhängigkeitsraum ist. Infolgedessen bleiben die Sätze Nr. **3.**2 und Nr. **3.**2.1 auch richtig unter folgenden Voraussetzungen: K bzw. $K = K_1 + \cdots + K_n$ sind topologische Abhängigkeitsräume; K bzw. K_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) ist zusammenhängend; ist L eine beliebige A-Mannigfaltigkeit vom Range $n - 1$ bzw. $L = L[a_2, \ldots, a_n]$, so gilt für K bzw. K_1 statt K und die (abgeschlossene) Teilmenge $A = L$ von K bzw. $A = L \cdot K_1$ von K_1 der Brückensatz (Nr. **5.**1); jedem unabhängigen Punktsystem $[x_1, \ldots, x_n]$ aus K ist ein Element eines Zusammenhangsraumes Θ als eindeutige und partiell stetige Sekante zugeordnet (Nr. **2.**1 und Nr. **2.**4).

Eingegangen 8. Mai 1939.

Bemerkung bei der Korrektur.

Zu der vorangehenden Arbeit „Über Abhängigkeitsräume“ (dieses Journal **181**) teilt Herr B. L. van der Waerden freundlicherweise die Antwort auf zwei, dort (Nr. **3.** 2., Zusatz (S. 201)) erwähnte, aber offen gelassene Fragen mit. Die *1. Frage* ist zu verneinen, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei $H = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $n = 2$ und es gelte Axiom (K) sowie $A[x_1, x_2]$, $A[x_1, x_3]$, $U[x_1, x_4]$, $U[x_2, x_3]$. Dann ist (1. 2. 1. 2.) erfüllt. Will man jetzt $A[x]$ bzw. $U[x]$ so erklären, daß Axiom (I) gilt, so muß $U[x_1]$ gesetzt werden (wegen $U[x_1, x_4]$). Soll ferner Axiom (A) gelten, so folgt aus $U[x_1]$, $A[x_1, x_2]$, $A[x_1, x_3]$, daß $A[x_2, x_3]$ entgegen der Voraussetzung $U[x_2, x_3]$. — Die *2. Frage* ist zu bejahen. Man braucht nämlich nur die Punkte $x = (x_0, x_1, x_2)$ der Ebene (homogene Koordinaten) abzubilden auf die Punkte $X = (x_0^p, x_0^{p-1} x_1, \ldots, x_2^p)$ eines geeigneten projektiven Raumes und $A[x', x'', \ldots]$ zu setzen, wenn die Bildpunkte $X', X'', \ldots$ linear abhängig sind. —

(Eingegangen 23. März 1940.)

Über ein räumliches Analogon des Sehnenvierecks.

Von *Eugen Egerváry* in Budapest.

Unter den von J. Steiner ohne Beweis veröffentlichten zahlreichen Sätzen befinden sich die beiden folgenden [1]):

Satz S. „*Schneiden sich die drei Diagonalen eines Polyeders von oktaedrischer Form in einem Punkte D und unter rechten Winkeln, so liegen die Fußpunkte der aus jenem Punkte D auf die Seitenflächen gefällten Perpendikel allemal alle acht in irgendeiner Kugelfläche.*“

Satz S′. „*Schneiden sich die Diagonalen eines Vierecks rechtwinklig, so liegen die Fußpunkte der aus ihrem Schnittpunkte D auf die vier Seiten gefällten Perpendikel in einem Kreise.*“

Die im Satze S auftretenden, auf einer Kugel liegenden acht Punkte bilden ein Sechsflach mit Diagonalschnittpunkt, und in der Nebeneinanderstellung der beiden Sätze S und S′ dürfte man eine Andeutung dafür erblicken, daß dieses *Sehnensechsflach mit Diagonalschnittpunkt* als ein räumliches Analogon des Sehnenvierecks zu betrachten ist.

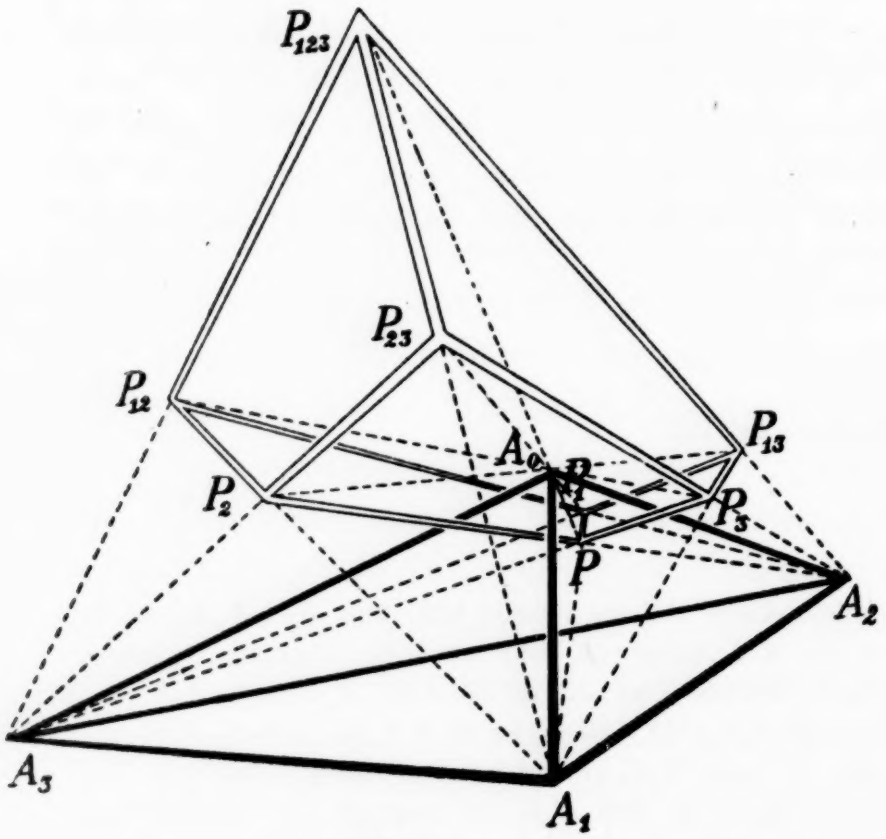


Fig. 1.

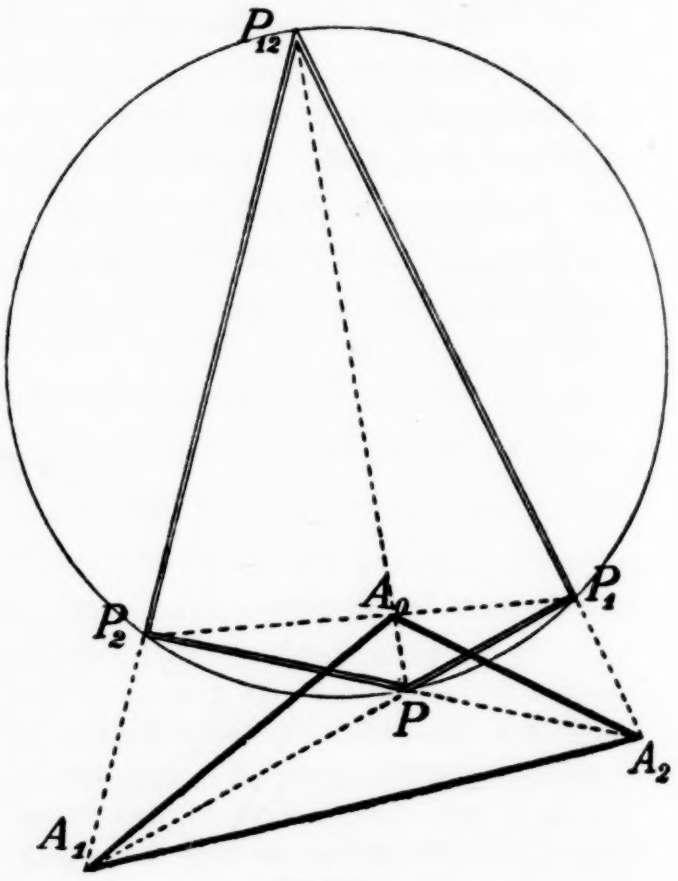


Fig. 2.

[1]) J. Steiner, Geometrische Lehrsätze und Aufgaben, dieses Journal **31** (1846), S. 90—92 = Ges. Werke **2**, S. 357—358. Konstruiert man die sechs Kugeln, die die Verbindungsstrecken der Oktaederecken mit dem Diagonalschnittpunkt zum Durchmesser haben, so sind die acht Schnittpunkte von je drei dieser Kugeln die Fußpunkte der im Satze S erwähnten Perpendikel. Die sechs Kugeln gehen bei einer Inversion in bezug auf eine Kugel um den Diagonalschnittpunkt in ein rechtwinkliges Parallelepiped über, woraus auf Grund von bekannten Eigenschaften der Inversion die Steinersche Behauptung unmittelbar folgt.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir zeigen, daß das Sehnensechsflach mit Diagonalschnittpunkt eine weitgehende Analogie zum Sehnenviereck aufweist, und daß insbesondere zwischen seinen Kanten und Diagonalen eine Beziehung besteht, die als Gegenstück zum Ptolemäischen Satze anzusehen ist.

Wir stellen im folgenden die wesentlichsten Eigenschaften dieses Polyeders [parallel mit denjenigen des Sehnenvierecks] zusammen:

Satz A. *Wird ein stumpfeckiges [-winkliges] orthozentrisches Tetraeder* $A_0A_1A_2A_3$ *[Dreieck* $A_0A_1A_2$*] mit den Kanten[Seiten]-Längen*

$$\overline{A_iA_j} = \sqrt{\lambda_i + \lambda_j},\ \lambda_0 < 0;\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0; \qquad i, j = 0, 1, 2, 3;\ i \neq j$$

als Grundtetraeder [-dreieck] eines baryzentrischen Koordinatensystems $(p_0p_1p_2p_3)$ *gewählt, so bilden je acht [vier] Punkte*

(1) $P(p_0p_1p_2p_3)$, $P_1(p_0 - p_1p_2p_3)$, $P_2(p_0p_1 - p_2p_3)$, $P_3(p_0p_1p_2 - p_3)$, $P_{123}(p_0 - p_1 - p_2 - p_3)$, $P_{23}(p_0p_1 - p_2 - p_3)$, $P_{31}(p_0 - p_1p_2 - p_3)$, $P_{12}(p_0 - p_1 - p_2p_3)$,

deren Koordinaten sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden und die Gleichung

$$\lambda_0p_0^2 + \lambda_1p_1^2 + \lambda_2p_2^2 + \lambda_3p_3^2 = 0 \tag{2}$$

befriedigen, ein Sehnensechsflach mit Diagonalschnittpunkt [Sehnenviereck], welches das Koordinatentetraeder $A_0A_1A_2A_3$ *[-dreieck* $A_0A_1A_2$*] zum Diagonaltetraeder [-dreieck] hat und seiner Polarkugel [Polarkreis] einbeschrieben ist.*

Die in dem genannten Sechsflach [Viereck] enthaltenen Strecken (Kanten, Seiten und Diagonalen) lassen sich durch die Größen λ_i, p_j *symmetrisch in der Form*

$$\overline{P'P''}^2 = -2\,\frac{\sum_{i=0}^{3}\lambda_ip_i'p_i''}{\sum_{i=0}^{3}p_i'\sum_{i=0}^{3}p_i''}; \qquad P', P'' = P, P_1, P_2, \ldots, P_{123}, \tag{3}$$

ausdrücken. [*Läßt man in* (1), (2) *und* (3) *alle Größen mit dem Index 3 fort, so erhält man die entsprechenden Relationen für das Sehnenviereck.*]

Durchlaufen die Größen λ_i, p_i alle mit der Gleichung (2) verträglichen reellen Wertsysteme, so erhält man die Gesamtheit der Sehnensechsflache mit Diagonalschnittpunkt [Sehnenvierecke]; die Parameter λ_i, p_i sind also als symmetrische Bestimmungsstücke eines Sehnensechsflachs mit Diagonalschnittpunkt [Sehnenvierecks] verwendbar.

Die Elimination der Parameter λ_i, p_i aus den Gleichungen (2) und (3) ergibt folgendes räumliche Analogon zum Ptolemäischen Satze [den Ptolemäischen Satz]:

Satz B. *In einem Sehnensechsflach mit Diagonalschnittpunkt ist die Quadratsumme der geometrischen Mittel homologer Kantenquadrupel gleich dem Quadrate der geometrischen Mittel der Körperdiagonalen.*

Die Ableitung dieser Ergebnisse geschieht durch Anwendung geeigneter baryzentrischer Koordinatensysteme. Besonders wesentlich für die Anwendbarkeit dieser Methode ist die Erkenntnis, daß einerseits das Diagonaltetraeder eines Sehnensechsflachs mit Diagonalschnittpunkt *orthozentrisch* ist und andererseits ein räumliches baryzentrisches Koordinatensystem mit orthozentrischem Grundtetraeder Eigenschaften aufweist, die dem ebenen baryzentrischen Koordinatensystem vollkommen analog sind.

Die Abschnitte I und II enthalten einige vorbereitende Bemerkungen über das orthozentrische Tetraeder bzw. über das Sehnenviereck. Abschnitt III ist der Diskussion des Sehnensechsflachs mit Diagonalschnittpunkt gewidmet. Im Abschnitt IV werden die gewonnenen Ergebnisse als Schließungssätze gedeutet.

Methode und Ergebnisse der vorliegenden Arbeit lassen sich ohne Schwierigkeit auf einen Raum von beliebiger Dimensionszahl übertragen.

I.

Die im folgenden in Betracht kommenden Eigenschaften eines orthozentrischen Tetraeders, sowie des darauf bezogenen baryzentrischen Koordinatensystems lassen sich am einfachsten aus folgendem Satze herleiten:

Satz C. *Das Quadrat der Entfernung eines Punktepaares* $P(p_0p_1p_2p_3)$, $Q(q_0q_1q_2q_3)$, *als Funktion der durch die Bedingung* $\Sigma p_i = \Sigma q_i = 1$ *normierten baryzentrischen Koordinaten, ist dann und nur dann eine Quadratsumme*

$$(4) \qquad \overline{PQ}^2 = \lambda_0(p_0 - q_0)^2 + \lambda_1(p_1 - q_1)^2 + \lambda_2(p_2 - q_2)^2 + \lambda_3(p_3 - q_3)^2$$

der Koordinatendifferenzen, wenn das Koordinatentetraeder orthozentrisch ist [2]).

Bei einem orthozentrischen Tetraeder bestehen zwischen den sechs Bestimmungsstücken eines allgemeinen Tetraeders zwei Bedingungsgleichungen [3]). Demgemäß ist es zunächst erwünscht, ein orthozentrisches Tetraeder durch vier unabhängige, symmetrische Parameter zu bestimmen. Als solche lassen sich vorteilhaft die in der Distanzformel (4) auftretenden Koeffizienten λ_i verwenden, die eine einfache geometrische Bedeutung haben.

Durch Anwendung der Distanzformel (4) auf zwei Ecken des orthozentrischen Koordinatentetraeders $A_0A_1A_2A_3$ erhält man den Ausdruck der Kanten A_iA_j durch die Parameter λ_i in der Form

$$(5) \qquad \overline{A_iA_j}^2 = \lambda_i + \lambda_j; \qquad i, j = 0, 1, 2, 3; \; i \neq j.$$

Hieraus folgt auf Grund des Kosinussatzes:

$$(6) \qquad \lambda_i = \overline{A_iA_j} \cdot \overline{A_iA_k} \cos A_j\widehat{A_i}A_k; \qquad i, j, k = 0, 1, 2, 3.$$

λ_i ist also gleich dem gemeinsamen Werte der inneren Produkte derjenigen Kantenpaare, welche in A_i zusammenstoßen [4]).

---

[2]) Das Quadrat der Entfernung wird als Funktion der normierten baryzentrischen Koordinaten gegeben durch

$$(*) \qquad \overline{PQ}^2 = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}(r_i; r_j)\,(p_i - q_i)\,(p_j - q_j), \quad \sum_{i=0}^{3} p_i = \sum_{i=0}^{3} q_i = 1\,,$$

wo r_i den von einem beliebigen Raumpunkte nach A_i gezogenen Vektor und $(r_i; r_j)$ das innere Produkt von r_i und r_j bedeutet. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die quadratische Form (*) sich infolge der Identität $\sum_{i=0}^{3}(p_i - q_i) = 0$ auf die Quadratsumme (4) reduziert, besteht in der Existenz eines Punktes A_4, in bezug auf den $(\overline{A_4A_i}; \overline{A_4A_j})$ für alle Paare $i \neq j$ denselben Wert hat. Dann ist aber

$$(\overline{A_4A_i}; \overline{A_jA_k}) = 0\,,$$

d. h. A_4 ist das Orthozentrum von $A_0A_1A_2A_3$. Nach diesem Satze kommt den orthozentrischen Koordinatentetraedern dieselbe Ausnahmestellung zu wie den orthogonalen Achsentripeln.

[3]) Für die Existenz des Orthozentrums ist es z. B. notwendig und hinreichend, daß die drei Abstände der Gegenkantenmitten einander gleich sind. Siehe M. Zacharias, Enzyklopädie d. Math. Wiss. III A B 9, Elementargeometrie, S. 1061—1062.

[4]) Die Parameter λ_i haben — außer den im Texte angegebenen — noch folgende charakteristische Eigenschaften: 1.) λ_i ist gleich der Potenz der Ecke A_i in bezug auf die Polarkugel von $A_0A_1A_2A_3$. 2.) die reziproken Werte $\frac{1}{\lambda_i}$ sind den baryzentrischen Koordinaten des Orthozentrums A_4 proportional. 3.) Wird die Kotangente der Tetraederecke A_i durch $\frac{\sqrt{1 - \sin^2 A_i}}{\sin A_i}$ definiert, wo $\sin A_i$ den v. Staudtschen Eckensinus von A_i bedeutet und die Quadratwurzel bei einer spitzen bzw. stumpfen Ecke positiv bzw. negativ zu nehmen ist, so ist $\lambda_i = \frac{V}{d}\operatorname{ctg} A_i$ (V = Volumen des Tetraeders, d = gemeinsamer Abstand der Gegenkantenmitten). Zwischen den Kotangenten der Ecken besteht die Gleichung:

$$\operatorname{ctg} A_0 + \operatorname{ctg} A_1 + \operatorname{ctg} A_2 + \operatorname{ctg} A_3 = \operatorname{ctg} A_2 \operatorname{ctg} A_3 \operatorname{ctg} A_4 + \operatorname{ctg} A_3 \operatorname{ctg} A_4 \operatorname{ctg} A_1 + \operatorname{ctg} A_4 \operatorname{ctg} A_1 \operatorname{ctg} A_2 + \operatorname{ctg} A_1 \operatorname{ctg} A_2 \operatorname{ctg} A_3\,.$$

Eine Ecke A_i des orthozentrischen Tetraeders hat nach (6) lauter spitze [rechte] bzw. stumpfe Kantenwinkel, je nachdem $\lambda_i > 0$ [$= 0$] bzw. < 0 ist.

Da bei einem reellen, eigentlichen Tetraeder nach Gleichung (5) höchstens einer von den Parametern λ_i negativ sein [oder verschwinden] kann, so kann in einem orthozentrischen Tetraeder höchstens eine stumpfe [rechte] Ecke vorkommen.

Die Gleichung der Kugel, deren Mittelpunkt A_4 die normierten baryzentrischen Koordinaten

$$p_0 = -\frac{\lambda_4}{\lambda_0}, p_1 = -\frac{\lambda_4}{\lambda_1}, p_2 = -\frac{\lambda_4}{\lambda_2}, p_3 = -\frac{\lambda_4}{\lambda_3}; \frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_4}=0$$

hat, und deren Halbmesser R durch

$$-\frac{1}{R^2}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}$$

gegeben ist, ergibt sich aus (4) unmittelbar in folgender Form:

$$\lambda_0 p_0^2 + \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 + \lambda_3 p_3^2 = 0. \tag{2}$$

Die genannte Kugel ist also die Polarkugel des orthozentrischen Tetraeders und ist offenbar nur dann reell, wenn einer von den Parametern λ_i negativ, wenn also das orthozentrische Tetraeder stumpfeckig ist [5]).

Liegen die zwei Punkte P' und P'' auf der Polarkugel, so ergibt sich [6]) für ihre Entfernung aus (2) und (4) der folgende Ausdruck in *nichtnormierten* baryzentrischen Koordinaten:

$$\overline{P'P''}^2 = -2\frac{\sum_0^3 \lambda_i p_i' p_i''}{\sum_0^3 p_i' \sum_0^3 p_i''}. \tag{3}$$

Die für ein ebenes baryzentrisches Koordinatensystem geltenden Beziehungen und Formeln ergeben sich aus den vorhergehenden unmittelbar, wenn $p_3 = q_3 = 0$ gesetzt wird.

II.

Es gibt je vier Punkte, deren baryzentrische Koordinaten sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden, die Punkte

$$P(p_0 p_1 p_2),\ P_1(p_0 - p_1 p_2),\ P_2(p_0 p_1 - p_2),\ P_{12}(p_0 - p_1 - p_2).$$

Sie bilden ein vollständiges Viereck, dessen Diagonaldreieck mit dem Koordinatendreieck identisch ist [7]). Wenn umgekehrt ein Viereck auf sein Diagonaldreieck bezogen wird, so unterscheiden sich die Koordinaten seiner Ecken nur durch die Vorzeichen.

Ist nun $PP_1P_2P_{12}$ ein Sehnenviereck, so ist sein Umkreis der Polarkreis des Diagonaldreiecks $A_0A_1A_2$ [8]), die Koordinaten $p_0, \pm p_1, \pm p_2$ befriedigen also die Gleichung

---

[5]) Im folgenden nehmen wir immer $\lambda_0 < 0$ an. Mit Rücksicht auf (2) und (2*) ist dann λ_0 durch die Ungleichungen

$$\lambda_0 < 0; \frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}<0$$

eingeschränkt.

[6]) Sind die baryzentrischen Koordinaten *nicht* normiert, so ist offenbar nach (4)

$$\overline{PQ}^2 = \frac{\sum\lambda_\nu p_\nu^2}{(\sum p_\nu)^2} - 2\frac{\sum\lambda_\nu p_\nu q_\nu}{\sum p_\nu \sum q_\nu} + \frac{\sum\lambda_\nu q_\nu^2}{(\sum q_\nu)^2},$$

und nach Gleichung (2) verschwindet hier das erste und das letzte Glied, falls P und Q auf der Polarkugel liegen.

[7]) Siehe G. Berkhan-W. Fr. Meyer, Enzykl. d. Math. Wiss. III A B 10, Neuere Dreiecksgeometrie, S. 1196.

[8]) Das Diagonaldreieck eines einem Kegelschnitte einbeschriebenen vollständigen Vierecks ist stets ein Pol-

$$\lambda_0 p_0^2 + \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 = 0 \tag{2'}$$

des Polarkreises (wo λ_i das innere Produkt der Seiten $\overline{A_i A_j}$, $\overline{A_i A_k}$ bedeutet). Da bei reellem Polarkreis die Koeffizienten λ_i nach (2′) nicht alle positiv sein können, so erkennt man hieraus gleichzeitig, daß ein Sehnenviereck immer ein stumpfwinkliges Diagonaldreieck besitzt.

Ein Sehnenviereck kann also in bezug auf sein Diagonaldreieck durch die Eigenschaft charakterisiert werden, daß die Koordinaten seiner Ecken sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden und die Gleichung (2′) befriedigen. Hieraus ergibt sich zunächst der bekannte Satz [8]):

Satz D′. *Wenn die drei Größen p_0, p_1, p_2 bei festem Grunddreieck $A_0A_1A_2$ alle reellen, mit der Gleichung (2′) verträglichen Wertsysteme durchlaufen, so erhält man ∞^1 Vierecke, die $A_0A_1A_2$ zum Diagonaldreieck haben und seinem Polarkreis einbeschrieben sind.*

Wenn aber die sechs Größen p_0, p_1, p_2, λ_0, λ_1, λ_2 alle reellen, mit (2′) verträglichen Wertsysteme durchlaufen, so erhält man offenbar die Gesamtheit der ∞^4 Sehnenvierecke; die Größen λ_0, λ_1, λ_2, p_0, p_1, p_2 können demnach als symmetrische Parameter zur Bestimmung der Sehnenvierecke verwendet werden.

Mit Benutzung der Distanzformel (3) kann man die Seiten und Diagonalen des Sehnenvierecks $PP_1P_2P_{12}$ folgendermaßen durch die Parameter λ_i, p_i ausdrücken:

$$\overline{PP_{12}} = \frac{\sqrt{-\lambda_0}p_0}{\sqrt{ss_{12}}}; \quad \overline{PP_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}p_1}{\sqrt{ss_1}}; \quad \overline{PP_2} = \frac{\sqrt{\lambda_2}p_2}{\sqrt{ss_2}}$$

$$\overline{P_1P_2} = \frac{\sqrt{-\lambda_0}p_0}{\sqrt{s_1s_2}}; \quad \overline{P_2P_{12}} = \frac{\sqrt{\lambda_1}p_1}{\sqrt{s_2s_{12}}}; \quad \overline{P_1P_{12}} = \frac{\sqrt{\lambda_2}p_2}{\sqrt{s_1s_{12}}} \tag{7'}$$

$$\left(s = \frac{p_0 + p_1 + p_2}{2}, \; s_i = s - p_i, \; s_{ij} = s - p_i - p_j\right).$$

Aus den Gleichungen (2′), (7′) folgt:

$$-\overline{PP_{12}} \cdot \overline{P_1P_2} + \overline{PP_1} \cdot \overline{P_2P_{12}} + \overline{PP_2} \cdot \overline{P_1P_{12}} = \frac{\lambda_0 p_0^2 + \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2}{\sqrt{ss_1s_2s_{12}}} = 0.$$

Der Ptolemäische Satz erscheint also in unserer Darstellung als eine unmittelbare Folge der Umkreisgleichung [9]).

III.

Sind die vier Körperdiagonalen eines Sechsflachs inzident, so treffen sich auch die drei homologen [10]) Quadrupel von Kanten des Sechsflachs in je einem Punkte. Wird das Sechsflach auf sein durch jene vier Inzidenzpunkte $A_0A_1A_2A_3$ gebildetes Diagonaltetraeder als Koordinatentetraeder bezogen, so unterscheiden sich die entsprechenden

---

dreieck des Kegelschnittes. Es gibt immer ∞^1 einem Kegelschnitte einbeschriebene Vierecke, die ein gegebenes Poldreieck des Kegelabschnittes als Diagonaldreieck besitzen. S. Heffter-Köhler, Lehrbuch d. Anal. Geometrie **1** (1927), S. 306—307.

[9]) Die zweite Relation, welche zwischen den Strecken eines vollständigen Sehnenvierecks besteht, wird erhalten, wenn man die Produkte der Seiten seiner Teildreiecke mit zyklisch abwechselnden Vorzeichen addiert. Man findet mit Rücksicht auf die Gleichungen (7)

$$\overline{PP_1} \cdot \overline{P_1P_{12}} \cdot \overline{P_{12}P} - \overline{P_1P_{12}} \cdot \overline{P_{12}P_2} \cdot \overline{P_2P_1} + \overline{P_{12}P_2} \cdot \overline{P_2P} \cdot \overline{PP_{12}} - \overline{P_2P} \cdot \overline{PP_1} \cdot \overline{P_1P_2} =$$
$$\frac{\sqrt{-\lambda_0\lambda_1\lambda_2}p_0p_1p_2}{ss_1s_2s_{12}}(s_2 - s + s_1 - s_{12}) = 0.$$

[10]) Homolog sind vier Kanten, wenn sie die Ecken von zwei Gegenseiten des Sechsflachs verbinden.

baryzentrischen Koordinaten seiner Ecken nur durch die Vorzeichen. Umgekehrt, je acht Punkte

$$P_0(p_0p_1p_2p_3),\ P_1(p_0 - p_1p_2p_3),\ P_2(p_0p_1 - p_2p_3),\ P_3(p_0p_1p_2 - p_3),$$
$$P_{123}(p_0 - p_1 - p_2 - p_3),\ P_{23}(p_0p_1 - p_2 - p_3),\ P_{31}(p_0 - p_1p_2 - p_3),\ P_{12}(p_0 - p_1 - p_2p_3),$$

deren entsprechende Koordinaten sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden, bestimmen ein Sechsflach mit Diagonalschnittpunkt, dessen Diagonaltetraeder mit dem Koordinatentetraeder identisch ist.

Ist nun das Sechsflach mit Diagonalschnittpunkt ein Sehnensechsflach, d. h. einer Kugel einbeschrieben, so ist seine Umkugel die Polarkugel seines Diagonaltetraeders $A_0A_1A_2A_3$. Das Diagonaltetraeder eines Sehnensechsflachs mit Diagonalschnittpunkt ist also [11]) *orthozentrisch* und kann nach I durch die vier symmetrischen Parameter λ_i bestimmt werden. Dabei ist λ_i der gemeinsame Wert der inneren Produkte der in A_i zusammenstoßenden Kantenpaare. Die Koordinaten $p_0, \pm p_1, \pm p_2, \pm p_3$ der Ecken befriedigen also die Gleichung

$$\lambda_0 p_0^2 + \lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 + \lambda_3 p_3^2 = 0 \tag{2}$$

der Polarkugel.

Da bei reellen Koordinaten die λ_i nach (2) nicht alle positiv sein können, so erkennt man hieraus gleichzeitig, daß das *orthozentrische* Diagonaltetraeder eines Sehnensechsflachs immer *stumpfeckig* ist.

Nach dem Vorhergehenden kann ein Sehnensechsflach mit Diagonalschnittpunkt in bezug auf sein Diagonaltetraeder durch die Eigenschaft charakterisiert werden, daß die Koordinaten seiner Ecken sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden und die Gleichung (2) befriedigen. Hieraus ergibt sich zunächst der folgende, zu D′ analoge Satz:

Satz D. *Wenn p_0, p_1, p_2, p_3 bei festem orthozentrischen Grundtetraeder $A_0A_1A_2A_3$ alle reellen, mit der Gleichung* (2) *verträglichen Wertsysteme durchlaufen, so erhält man ∞^2 Sechsflache mit Diagonalschnittpunkt, die $A_0A_1A_2A_3$ zum Diagonaltetraeder haben und seiner Polarkugel einbeschrieben sind.*

Wenn aber die acht Größen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p_0, p_1, p_2, p_3$ alle reellen, mit (2) verträglichen Wertsysteme durchlaufen, so erhält man offenbar die Gesamtheit der ∞^6 Sehnensechsflache mit Diagonalschnittpunkt; die Größen λ_i, p_i können demnach als symmetrische Parameter zur Bestimmung jener Sehnensechsflache verwendet werden.

Mit Benutzung der Distanzformel (3) kann man die Kanten und Körperdiagonalen des Sehnensechsflachs mit Diagonalschnittpunkt folgendermaßen durch die Parameter λ_i, p_i ausdrücken:

$$\begin{aligned}
&\overline{PP_{123}} = \frac{\sqrt{-\lambda_0}p_0}{\sqrt{ss_{123}}}, \quad \overline{PP_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}p_1}{\sqrt{ss_1}}, \quad \overline{PP_2} = \frac{\sqrt{\lambda_2}p_2}{\sqrt{ss_2}}, \quad \overline{PP_3} = \frac{\sqrt{\lambda_3}p_3}{\sqrt{ss_3}},\\
&\overline{P_1P_{23}} = \frac{\sqrt{-\lambda_0}p_0}{\sqrt{s_1s_{23}}}, \quad \overline{P_2P_{12}} = \frac{\sqrt{\lambda_1}p_1}{\sqrt{s_2s_{12}}}, \quad \overline{P_1P_{12}} = \frac{\sqrt{\lambda_2}p_2}{\sqrt{s_1s_{12}}}, \quad \overline{P_1P_{13}} = \frac{\sqrt{\lambda_3}p_3}{\sqrt{s_1s_{13}}},\\
&\overline{P_2P_{13}} = \frac{\sqrt{-\lambda_0}p_0}{\sqrt{s_2s_{13}}}, \quad \overline{P_3P_{13}} = \frac{\sqrt{\lambda_1}p_1}{\sqrt{s_3s_{13}}}, \quad \overline{P_3P_{23}} = \frac{\sqrt{\lambda_2}p_2}{\sqrt{s_3s_{23}}}, \quad \overline{P_2P_{23}} = \frac{\sqrt{\lambda_3}p_3}{\sqrt{s_2s_{23}}},\\
&\overline{P_3P_{12}} = \frac{\sqrt{-\lambda_0}p_0}{\sqrt{s_3s_{12}}}, \quad \overline{P_{23}P_{123}} = \frac{\sqrt{\lambda_1}p_1}{\sqrt{s_{23}s_{123}}}, \quad \overline{P_{13}P_{123}} = \frac{\sqrt{\lambda_2}p_2}{\sqrt{s_{13}s_{123}}}, \quad \overline{P_{12}P_{123}} = \frac{\sqrt{\lambda_3}p_3}{\sqrt{s_{12}s_{123}}}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\left(s = \frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3}{2},\ s_i = s - p_i,\ s_{ij} = s - p_i - p_j,\ s_{ijk} = s - p_i - p_j - p_k\right).$$

[11]) Die Gegenkanten des Diagonaltetraeders sind in bezug auf seine Polarkugel konjugiert, stehen also senkrecht aufeinander, woraus die Existenz des Orthozentrums unmittelbar folgt.

Aus den Gleichungen (2) und (7) folgt:

$$-\sqrt{\overline{PP_{123}}\cdot\overline{P_1P_{23}}\cdot\overline{P_2P_{13}}\cdot\overline{P_3P_{12}}}+\sqrt{\overline{PP_1}\cdot\overline{P_2P_{12}}\cdot\overline{P_3P_{13}}\cdot\overline{P_{23}P_{123}}}$$
$$+\sqrt{\overline{PP_2}\cdot\overline{P_1P_{12}}\cdot\overline{P_3P_{23}}\cdot\overline{P_{13}P_{123}}}+\sqrt{\overline{PP_3}\cdot\overline{P_1P_{13}}\cdot\overline{P_2P_{23}}\cdot\overline{P_{12}P_{123}}}$$
$$=\frac{\lambda_0 p_0^2+\lambda_1 p_1^2+\lambda_2 p_2^2+\lambda_3 p_3^2}{\sqrt[4]{ss_1s_2s_3s_{23}s_{31}s_{12}s_{123}}}=0\,.$$

Man erhält auf diese Weise folgendes dreidimensionales Analogon des Ptolemäischen Satzes:

Satz B. *Wenn ein Sechsflach mit Diagonalschnittpunkt einer Kugel einbeschrieben ist, so ist die Quadratsumme der geometrischen Mittel homologer Kantenquadrupel gleich dem Quadrate des geometrischen Mittels der Körperdiagonalen* [12]).

IV.

Der Satz D′ läßt folgende Deutung zu:

Ist ein Kreis und ein Dreieck gegeben, so existiert im allgemeinen kein Viereck, das dem Kreise einbeschrieben ist und das Dreieck zum Diagonaldreieck hat. Wenn aber ein Viereck von dieser Beschaffenheit existiert, so existieren ∞^1 solche Vierecke, und es ist der Kreis zum Dreieck konjugiert.

Dieser Schließungssatz ist offenbar ein Spezialfall eines bekannten Ponceletschen Schließungssatzes, wenn man den Umkreis als Umkegelschnitt, irgendein Eckpunktepaar des Diagonaldreiecks als Inkegelschnitt des Sehnenvierecks deutet.

Der Satz D liefert zu dem eben genannten Schließungssatze ein dreidimensionales Analogon:

Ist eine Kugel und ein Tetraeder gegeben, so existiert im allgemeinen kein Sechsflach, das der Kugel einbeschrieben ist und das Tetraeder zum Diagonaltetraeder hat. Wenn aber ein Sechsflach von dieser Beschaffenheit existiert, so gibt es ∞^2 solche Sechsflache, und es ist die Kugel zum Tetraeder konjugiert.

---

[12]) Läßt man irgendeine Strecke (Kante, Körperdiagonale) und die mit ihr inzidenten neun Strecken eines Sehnensechsflachs mit Diagonalschnittpunkt fort, so hat das zurückbleibende Sechseck die auf Grund der Gleichungen (7) evidente Eigenschaft: Das Produkt von drei nicht zusammenstoßenden Strecken ist dem Produkte der drei übrigen gleich.

Eingegangen 31. Mai 1939.